MECANICA CUANTICA III (1er. Cuatrimestre/2019). Prof. N.J. Castellani

Guía de problemas Nº1b

1) A partir de la definición de α_r, obtener la representación matricial de α_r utilizando aquellas de α_x, α_y y α_z. Probar que $\alpha_r^2 = 1$ y que α_r y β anticomutan.

2) Partiendo de las representaciones $\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $\alpha_r = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ deducir las siguientes ecuaciones diferenciales que deben cumplir las componentes $\psi_1 = r^{-1}F$ y $\psi_2 = r^{-1}G$ del spinor (ψ_1, ψ_2) en el problema de autovalores y autofunciones de H:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d}{d\rho} + \dfrac{k'}{\rho}\right)G - \left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha} - \dfrac{V}{\hbar c \alpha}\right)F = 0 \\ \left(\dfrac{d}{d\rho} - \dfrac{k'}{\rho}\right)F - \left(\dfrac{\alpha_2}{\alpha} + \dfrac{V}{\hbar c \alpha}\right)G = 0 \end{cases}$$

donde $\rho = \alpha r$, $\alpha_1 = (mc^2 + E)/\hbar c$, $\alpha_2 = (mc^2 - E)/\hbar c$, $\alpha = \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$ y k' autovalor del operador k.

3) En el caso coulombiano con $V(r) = -\dfrac{Ze^2}{r}$, definiendo $\dfrac{V(r)}{\hbar c \alpha} = -\dfrac{\gamma}{\rho}$, tomando $\begin{cases} F(\rho) = f(\rho)e^{-\rho} \\ G(\rho) = g(\rho)e^{-\rho} \end{cases}$ y planteando $\begin{cases} f = \rho^s \sum_{\upsilon=0}^{\infty} b_\upsilon \rho^\upsilon \\ g = \rho^s \sum_{\upsilon=0}^{\infty} a_\upsilon \rho^\upsilon \end{cases}$ obtener las siguientes relaciones de recurrencia para los desarrollos en serie de potencias anteriores:

a) $$\upsilon > 0 \begin{cases} (s + \upsilon + k')b_\upsilon - b_{\upsilon-1} - \gamma a_\upsilon - \dfrac{\alpha_1}{\alpha} a_{\upsilon-1} = 0 \\ (s + \upsilon - k')a_\upsilon - a_{\upsilon-1} + \gamma b_\upsilon - \dfrac{\alpha_2}{\alpha} b_{\upsilon-1} = 0 \end{cases}$$

b) $$\upsilon = 0 \begin{bmatrix} -\gamma & s + k' \\ s - k' & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = 0$$

4) Del resultado del inciso a) del ejercicio 3) obtener que

$$[illegible]$$

para $\upsilon > 0$. Reemplazando en la segunda de las ecuaciones de a), ver que cuando $\upsilon \to \infty$, $a_\upsilon \approx \frac{2a_{\upsilon-1}}{\upsilon}$. ¿Cómo se comportará la serie $\sum_{\upsilon=0}^{\infty} a_\upsilon \rho^\upsilon$? ¿Cómo se comportará la serie $\sum_{\upsilon=0}^{\infty} b_\upsilon \rho^\upsilon$?

5) Adoptando $\upsilon = n'$ tal que $a_{n'+1} = b_{n'+1} = 0$, llegar a las ecuaciones:

$$[illegible]$$

6) Demostrar que el operador $k = \frac{1}{\hbar}\beta\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{L} + \hbar\right)$ conmuta con P_r, β y $|\vec{r}|$,

donde $P_r = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\vec{r}\cdot\vec{p} + \left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\frac{1}{r}\right]$

Estudiar la conmutación de k con α_r, donde $\alpha_r = \frac{1}{r}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{r}\right)$ (componente radial de $\vec{\alpha}$).

7) Sea la expresión exacta de las autoenergías electrónicas del átomo de hidrógeno:

$$E_{n'k'} = \frac{mc^2}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{(s+n')^2}}} \qquad \gamma = \frac{Ze^2}{\hbar c} \qquad s = \sqrt{k'^2 - \gamma^2}$$

con n'=número cuántico ppal. relativista y k' autovalor del operador k. Expresar a $E_{n'k'}$ como una serie de potencias en γ^2.

$$E_{nk'} = mc^2\left[1 - \frac{\gamma^2}{2n^2} - \frac{\gamma^4}{2n^4}\left(\frac{n}{|k'|} - \frac{3}{4}\right)\right], \quad n = n' + |k'|$$

L

a

e

x

p

r