MECANICA CUANTICA III (1er. Cuatrimestre/2019). Prof. N.J. Castellani

Guía de problemas Nº3

1) Demostrar que cuando el operador $\hat{a}_{k\sigma}$ se estudia en la representación de Heisenberg se lo puede exprasar de la forma: $\hat{a}_{k\sigma}(t) = e^{-i\omega_k t}\hat{a}_{k\sigma}$.

   (Observación: actuar sobre un estado general del campo electromagnético)

2) Expresar el campo eléctrico $\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)$ en términos de los operadores de creación y aniquilación de fotones $\hat{a}_{k\sigma}(t), \hat{a}^{\dagger}_{k\sigma}(t)$.

   Probar que en el estado de vacío $|0\rangle$ del campo electromagnético se cumple $\langle 0|\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)|0\rangle = 0$ pero que $\langle 0|\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)\cdot\hat{\vec{E}}(\vec{r}',t)|0\rangle = \frac{2\pi\hbar}{\Omega}\sum_{k\sigma}\omega_k e^{\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$.

   Evaluar el valor medio de la desviación cuadrática media del campo eléctrico cuando $\vec{r} = \vec{r}\,'$.

   Considerando que el campo magnético $\hat{\vec{B}}(\vec{r},t)$ aporta un término semejante, calcular la energía del campo electromagnético dentro de un volumen Ω debida a estas fluctuaciones. Comparar este valor con aquél de la energía de punto cero del conjunto de osciladores del campo.

3) Los estados 1s, 2s y $2p_z$ del electrón en el átomo de hidrógeno son los siguientes:

$$\psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

$$\psi_{2s} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}(2 - r/a_0)e^{-r/a_0}$$

$$\psi_{2p_z} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}\cos\theta$$

   Decir cuál transición de emisión está prohibida y cuál permitida: 2s→1s o $2p_z$→1s, en base a argumentos de paridad.

En el caso de la transición permitida calcular el tiempo de vida media del estado inicial, considerando el proceso de emisión espontánea correspondiente.

4) Demostrar que los procesos de emisión y absorción de un fotón por parte de un electrón libre están prohibidos.

5) Consideremos la dispersión de la luz por un electrón libre (dispersión Thompson) en términos absolutamente clásicos. Este proceso ocurre por ejemplo en la corona K del sol y en los experimentos Tokamak de fusión.

Supongamos que una onda de la forma $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha)$ incide sobre un electrón en reposo.

Probar que el momento dipolar del electrón cumple: $\ddot{\vec{d}} = \frac{e^2}{m} \vec{E}, \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \alpha)$

Considerando que la energía dI radiada en el ángulo sólido $d\Omega$ a lo largo de la dirección $\hat{n}$ es $dI = \frac{1}{4\pi c^3} \left(\ddot{\vec{d}} \times \hat{n} \right)^2 d\Omega$ (CGS) y que el vector de Poynting de la onda incidente es $S = \frac{c}{4\pi} E^2$ (CGS) probar que: $d\sigma = dI / S = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 sen^2\theta d\Omega$, donde θ es el ángulo entre $\hat{n}$ y $\vec{E}$.

Integrando sobre todos los ángulos, probar que: $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2$.