MECANICA CUANTICA III (1er. Cuatrimestre/2019). Prof. N.J. Castellani

Guía de problemas Nº2

1) Considerar un electrón sometido a un potencial de fuerzas centrales $V = V(|\vec{r}|)$.

Partiendo de la la siguiente ecuación para la componente mayor ψ_2 del biespinor

$\begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r},t) \\ \psi_2(\vec{r},t) \end{bmatrix}$, válida en el límite no relativista E', |V|<< mc^2

$$\frac{1}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left(1-\frac{E'-V}{2mc^2}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\psi_1 + V\psi_1 = E'\psi_1$$

y utilizando las identidades demostradas en el ejercicio 7) de la Guía 1 probar la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2m}p^2\left(1-\frac{E'}{2mc^2}\right)\psi_1 + \frac{1}{4m^2c^2}Vp^2\psi_1 - \frac{i\hbar}{4m^2c^2}\nabla V\cdot\vec{p}\,\psi_1 + \frac{1}{4m^2c^2}\hbar\vec{\sigma}\cdot\left(\nabla V\times\vec{p}\right)\psi_1 + V\psi_1 = E'\psi_1$$

2) Tomando que en el límite no relativista E', |V|<< mc^2 es válido:

$\frac{1}{2m}p^2\psi_1 = (E'-V)\psi_1$ y recordando las definiciones de los momentos angulares orbital y de espín, llegar a:

$H_0\psi_1 + H_f\psi_1 = E'\psi_1$ donde

$$H_0 = \frac{1}{2m}p^2 + V$$

$$H_f = -\frac{1}{8m^3c^2}p^4 - \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{dV}{dr}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{L}\cdot\vec{S}$$

3) Utilizando la identidad demostrada en el ejercicio 8) de la Guía 1, simetrizar el segundo término de H_f y hacerlo hermítico, resultando:

$$H_0 = \frac{1}{2m} p^2 + V$$

$$H_f = -\frac{1}{8m^3c^2} p^4 + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2} \nabla^2 V + \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

donde H_f se llama el hamiltoniano de estructura fina.

4) Verificar que las distintas contribuciones al Hamiltoniano de estructura fina son del orden de $mc^2\alpha^4$. Esto es: $\left|\left\langle H_{mv} \right\rangle\right|, \left|\left\langle H_D \right\rangle\right|, \left|\left\langle H_{SO} \right\rangle\right| \sim mc^2\alpha^4$.

5) Demostrar que $\left\langle 100 \pm 1/2 \right| H_{mv} \left| 100 \pm 1/2 \right\rangle = -\frac{5}{8} mc^2\alpha^4$,

$\left\langle 100 \pm 1/2 \right| H_D \left| 100 \pm 1/2 \right\rangle = \frac{1}{2} mc^2\alpha^4$ y que $\left\langle 100 \pm 1/2 \right| H_{SO} \left| 100 \pm 1/2 \right\rangle = 0$.

6) Verificar que los valores $E_{n,j} = -\left(mc^2 - E_n\right)$ obtenidos como límite $v \ll c$ para *n*=1 y *n*=2 en el caso de la ecuación de Dirac para el átomo de hidrógeno coinciden con los aquellos calculados a partir del Hamiltoniano H_f aplicando teoría de perturbaciones independientes del tiempo.