MECANICA CUANTICA III (1er. Cuatrimestre/2019). Prof. N.J. Castellani

Guía de problemas Nº1

1) A partir de la ecuación de Klein-Gordon con campos encontrar las expresiones de ρ y $\underline{j}$ que satisfacen la ecuación de continuidad:

$$\partial\rho(\underline{r},t)/\partial t + \underline{\nabla}.\underline{j}(\underline{r},t) = 0.$$

Verificar que es consistente con las sustituciones $\pm E \rightarrow \pm E - e\phi$ y $\pm\underline{p} \rightarrow \pm\underline{p} - e\underline{A}/c$ en la expresión de la ecuación de continuidad sin campos.

2) Demostrar que el determinante de la ecuación secular de Dirac para un electrón libre lleva a que $(E - m^2c^4 - c^2p^2)^2 = 0$.

3) Probar que:

$[\sigma'_x, \alpha_x] = 0$, $[\sigma'_x, \alpha_y] = 2i\alpha_z$, $[\sigma'_x, \alpha_z] = -2i\alpha_y$, $[\sigma'_x, \beta] = 0$.

4) Probar la siguiente propiedad: $\underline{S} = (\hbar/2i)\{\alpha_y\alpha_z;\ \alpha_z\alpha_x;\ \alpha_x\alpha_y\}$.

5) Verificar que en el límite $v/c << 1$ los autovectores de los autovalores E_+ o E_- del Hamiltoniano del electrón libre son aproximadamente al mismo tiempo autovectores de los autovalores $\pm\ \hbar/2$ del operador S_z. Verificar que en general esto ocurre cuando $\underline{S}//\underline{v}$.

6) Calcular los valores medios de α_z y σ'_z para alguno de los autovectores asociados a E_+ o E_- en el caso del electrón libre y en el límite $v/c << 1$. Verificar que $|<\alpha_z>| = |p_z|/mc$ y que $|<\sigma'_z>| = 1$. Observación: Integrar en un volumen L^3 considerando que la ondas planas deben satisfacer condiciones periódicas.

7) Verificar que:

$$(\underline{\sigma}.\underline{p})(\underline{\sigma}.\underline{p}) = p^2$$

$$(\underline{\sigma}.\underline{p})V(\underline{\sigma}.\underline{p}) = Vp^2 - i\hbar\ \underline{\nabla}V.\underline{p} + \hbar\underline{\sigma}.\underline{\nabla}V X \underline{p}$$

(Utilizar la identidad: $(\underline{\sigma}.\underline{B})(\underline{\sigma}.\underline{C}) = \underline{B}.\underline{C}\ I + i\underline{\sigma}.(\underline{B}X\underline{C})$, donde $[\underline{B}, \underline{\sigma}] = [\underline{C}, \underline{\sigma}] = 0$.)

8) Probar que $[dV/dr(\partial/\partial r)]^\dagger = -\ dV/dr(\partial/\partial r) - \nabla^2 V$, recordando que un operador hermítico O satisface $<\psi|O^\dagger|\chi> = <O\ \psi|\chi>$.

Realizar una integración por partes considerando estados atómicos de la forma $\psi = R(r)A(\theta,\varphi)$ y $\chi = S(r)B(\theta,\varphi)$.