Laboratorio II - Método de cuadrados mínimos

Objetivos

- Resolver problemas de dinámica y energía del cuerpo puntual, experimentalmente.
- Familiarizarse con el diseño y puesta en marcha de un experimento en el laboratorio, utilizando distintos materiales para medir diferentes magnitudes físicas.
- Afianzar conceptos de magnitudes medidas y errores asociados.
- Utilizar el método de ajuste por cuadrados mínimos en diferentes problemas de la física y valorar su utilidad en situaciones donde las magnitudes físicas están relacionadas mediante leyes.
- Analizar y discutir los resultados obtenidos, comparando lo predicho teóricamente con lo observado en el laboratorio.

Determinación de la constante elástica de un resorte

Introducción teórica

En este experimento se utilizarán nociones de dinámica del cuerpo puntual, vistas previamente en la materia.

En la figura a continuación se muestra el diagrama de cuerpo aislado para un cuerpo unido a resorte, de constante elástica k, suspendido verticalmente. No se tienen en cuenta los rozamientos entre el cuerpo y el aire, ni entre el cuerpo y la pared, y el movimiento del resorte se supone únicamente vertical (en la dirección y).

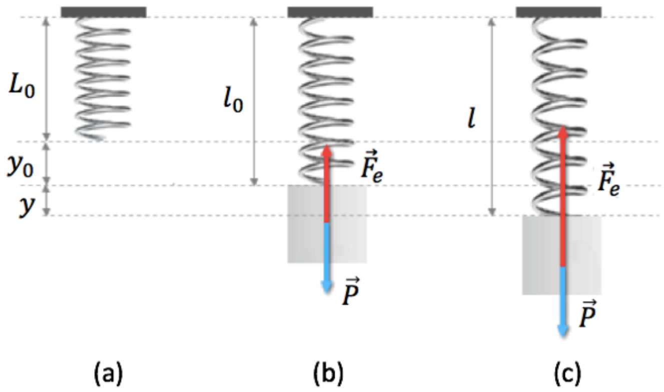


Figura 1: Representación esquemática de un cuerpo suspendido verticalmente del extremo de un resorte.

En la situación (a) planteada en la figura, el resorte se coloca en posición vertical y se sostiene del extremo superior, en equilibrio. En dicho caso, el resorte tendrá una longitud natural L_0. Si luego, en la situación (b), se engancha un cuerpo de peso $\vec{P}$ en el extremo inferior y el sistema alcanza el equilibrio nuevamente, con una longitud $l_0 = L_0 + y_0$, la sumatoria de fuerzas correspondientes a la segunda ley de Newton resulta:

$$\Sigma F_y) \longrightarrow F_e - P = 0 \tag{1}$$

que reemplazando la fuerza elástica por la constante k por la deformación resulta:

$$ky_0 - P = 0 \tag{2}$$

Ahora bien, si se cambia el peso colocado en el extremo, de la ecuación (2) se obtiene, para cualquier masa m_i agregada, una deformación de equilibrio:

$$y_i = \frac{g}{k} m_i \tag{3}$$

Esta ecuación permite determinar de manera experimental la constante elástica del resorte por un método estático.

Para la situación de la Figura 1 planteada en (c), el resorte se aparta voluntariamente de su posición de equilibrio y la fuerza elástica hará que la masa total suspendida M comience a oscilar, realizando un movimiento armónico simple (MAS) en torno a la posición de equilibrio dada por (3).

Recordando que para un resorte que realiza un MAS el período de oscilación viene dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \tag{4}$$

puede determinarse la constante elástica del resorte mediante un método dinámico, conociendo el período de oscilación resultante en función de la masa colocada en el extremo del resorte. Esto es:

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{M_i}{k}} \tag{5}$$

Elevando ambos términos al cuadrado, se obtiene una relación lineal entre el cuadrado del período de oscilación y la masa total suspendida M_i:

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2}{k} M_i \tag{6}$$

Observación: Si bien debería considerarse la masa de resorte que contribuye a la oscilación, por no tratarse de un cuerpo puntual, en este trabajo se omitirá dicha contribución.

Materiales

Para realizar este experimento se utilizarán los siguientes materiales:

- Resorte.
- Canasta porta-pesas.
- Esferas metálicas.
- Cinta métrica.
- Cronómetro.
- Balanza.

Procedimiento experimental

Se espera que en el laboratorio puedan montar el experimento tal como lo muestra la figura 2. Un resorte se colocará de la pared, con una regla metálica detrás y una canasta en su extremo inferior. En la misma se podrán ingresar esferas metálicas, de una en una, logrando diferentes deformaciones de equilibrio y períodos de oscilación del sistema canasta + esferas. La presencia de la regla facilitará la medida de la deformación en función de la masa agregada y el período se determinará con cronómetro, eligiendo arbitrariamente un instante de inicio y finalización del ciclo. Se deberá controlar que el sistema canasta-resorte tanto para que no toque la pared en cada oscilación, dado que se consideran despreciables en la teoría los rozamientos existentes, como para que no realice un movimiento pendular.

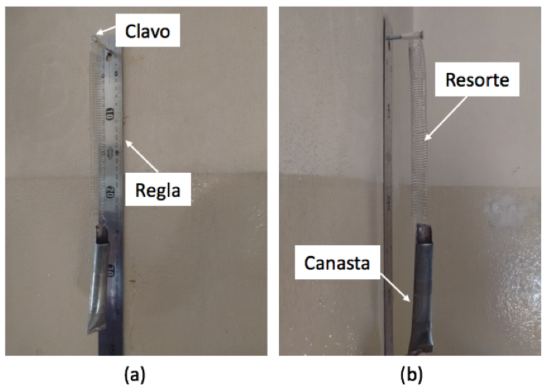


Figura 2: Foto de la representación esquemática del sistema para determinar la constante elástica. (a) vista frontal y (b) vista lateral donde puede verse la separación entre el sistema resorte/canasta y la pared.

Con el fin de poder realizar un análisis entre dos de las variables del sistema mediante el método de ajuste de cuadrados mínimos, se registrarán en primer lugar diferentes masas (agregando pequeñas esferas en la canasta) y la deformación que la misma provoca en el resorte (*método estático*). Por otro lado, para cada valor de masa agregada se registrará el tiempo de 10 oscilaciones consecutivas para luego calcular el periodo correspondiente (*método dinámico*). Esto se repetirá para 8 esferas incorporadas a la canasta. A partir del uso de las relaciones obtenidas en la ecuaciones (3) y (6), se espera determinar de manera alternativa la constante elástica del resorte, mediante un método estático y uno dinámico.

Método estático - Mediciones experimentales

- Masa del resorte = (................ ± ....) [..........]
- Masa de la canasta = (................ ± ....) [..........]
- Longitud de referencia = (................ ± ....) [..........]

Masa total M_i ($\pm$......) [......]	**Masa agregada** m_i (X_i) ($\pm$......) [......]	**Deformación** (Y_i) ($\pm$......) [......]

Nota: La masa agregada se obtendrá haciendo la resta de cada una de las masas totales menos la masa de la canasta (no se incluye al resorte en la balanza). La deformación se encontrará restando la longitud de elongación que se alcanza con cada masa total menos la longitud que se haya tomado de referencia.

Método dinámico - Mediciones experimentales

- Tiempo de reacción del observador = (................ ± ....) [..........]

M_i (X_i) ($\pm$......) [......]	$10\,T_i$ ($\pm$......) [......]	**Periodo** T_i ($\pm$......) [......]	T_i^2 (Y_i) [......]

Resultados y discusión

Método estático

$\sum_{i=1}^{8} X_i =$ .... [......] $\quad$ $\sum_{i=1}^{8} Y_i =$ .... [......] $\quad$ $\sum_{i=1}^{8} X_i Y_i =$ .... [......]

$\sum_{i=1}^{8} (X_i)^2 =$ .... [......] $\quad$ $D = 8 \cdot \sum_{i=1}^{8} (X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{8} X_i \right)^2 =$ .... [......]

- $A = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} (X_i)^2 \sum_{i=1}^{8} Y_i - \sum_{i=1}^{8} X_i \sum_{i=1}^{8} (X_i Y_i)}{D} =$ .... [......]
- $B = \dfrac{8 \sum_{i=1}^{8} (X_i Y_i) - \sum_{i=1}^{8} X_i \sum_{i=1}^{8} Y_i}{D} =$ .... [......]

Apellido y nombre:

Masa m_i (X_i) $(\pm$ ......) [......]	**Deformación** (Y_i) $(\pm$ ......) [......]	$e_i = Y_i - (BX_i + A)$ [......]	e_i^2 [......]

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8} e_i^2}{8}} = \text{................}[......]$$

$$\sigma_B \approx \sigma_Y \sqrt{\frac{8}{D}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_B \approx \text{................}[......]$$

de forma que:

$$E_B = \frac{\sigma_B}{\sqrt{8}} \quad \longrightarrow \quad E_B = \text{................}[......]$$

$$\text{Pendiente} \Rightarrow B \pm E_B \quad \longrightarrow \quad B = (\text{................} \pm \text{................})[..........]$$

Sabiendo que la pendiente B obtenida es igual a $\frac{g}{k}$:

$$B = \frac{g}{k} \quad \longrightarrow \quad k = \frac{g}{B}$$

Como k se obtiene de una medición indirecta, para conocer su error asociado tenemos que utilizar la fórmula de cálculo de propagación de errores:

$$E_k = \left|\frac{\partial k}{\partial B}\right| |E_B| \quad \longrightarrow \quad E_k = \left|\text{——}\right| |E_B|$$

que en función de los valores ya obtenidos resulta:

$$E_k = \text{................}[..........]$$

La constante elástica obtenida por el método estático, expresada correctamente es:

$$\mathbf{k_{est}} = (\text{................} \pm \text{................})[..........]$$

Método dinámico

$\sum_{i=1}^{8} X_i =$ .... [......] $\quad \sum_{i=1}^{8} Y_i =$ .... [......] $\quad \sum_{i=1}^{8} X_i Y_i =$ .... [......]

$\sum_{i=1}^{8} (X_i)^2 =$ .... [......] $\quad D = 8 \cdot \sum_{i=1}^{8} (X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{8} X_i\right)^2 =$ .... [......]

- $A = \dfrac{\sum_{i=1}^{8}(X_i)^2 \sum_{i=1}^{8} Y_i - \sum_{i=1}^{8} X_i \sum_{i=1}^{8}(X_i Y_i)}{D} =$ .... [......]
- $B = \dfrac{8 \sum_{i=1}^{8}(X_i Y_i) - \sum_{i=1}^{8} X_i \sum_{i=1}^{8} Y_i}{D} =$ .... [......]

M_i (X_i) $(\pm$ ......$)$ [......]	T_i^2 (Y_i) [......]	$e_i = Y_i - (BX_i + A)$ [......]	e_i^2 [......]

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8} e_i^2}{8}} = \text{................[......]}$$

$$\sigma_B \approx \sigma_Y \sqrt{\frac{8}{D}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_B \approx \text{................[......]}$$

de forma que:

$$E_B = \frac{\sigma_B}{\sqrt{8}} \quad \longrightarrow \quad E_B = \text{................[......]}$$

$$\text{Pendiente} \Rightarrow B \pm E_B \quad \longrightarrow \quad B = (\text{................} \pm \text{................})[\text{..........}]$$

Sabiendo que la pendiente B obtenida es igual a $\dfrac{4\pi^2}{k}$:

$$B = \frac{4\pi^2}{k} \quad \longrightarrow \quad k = \frac{4\pi^2}{B}$$

Como k se obtiene de una medición indirecta, para conocer su error asociado tenemos que utilizar la fórmula de cálculo de propagación de errores:

$$E_k = \left|\frac{\partial k}{\partial B}\right| |E_B| \quad \longrightarrow \quad E_k = \left|\text{——}\right| |E_B|$$

que en función de los valores ya obtenidos resulta:

$$E_k = \text{................[..........]}$$

La constante elástica obtenida por el método dinámico, expresada correctamente es:

$$\mathbf{k_{din}} = (\text{................} \pm \text{................})[\text{..........}]$$

Gráficos de ambos métodos

Análisis de resultados

Compare los resultados obtenidos para el valor de k por los dos métodos propuestos. Para esto, calcule el error relativo en k respecto del valor determinado en el método estático. Esto es:

$$e_{\%} = \frac{|k_{est} - k_{din}|}{k_{est}} \cdot 100$$

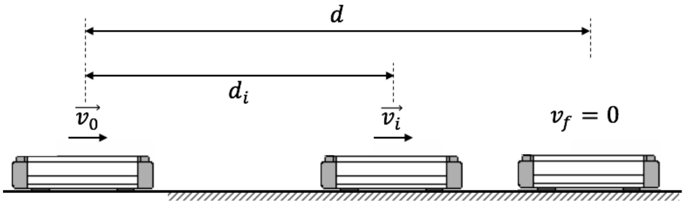
$$e_{\%} =$$

A continuación, compare los métodos teniendo en cuenta el error absoluto obtenido en cada método y realice una conclusión personal de la experiencia:

Determinación del coeficiente de rozamiento dinámico

Introducción teórica

Supongamos que tenemos un carro de masa m que se mueve sobre una superficie lisa (sin rozamiento) con una velocidad inicial v_0, y luego ingresa a una zona *con* rozamiento, siendo μ_d el coeficiente de rozamiento dinámico entre las superficies en contacto. Por acción de la fuerza de rozamiento $\vec{f_r}$, el carro detendrá su marcha luego de recorrer una distancia d. La situación planteada se muestra en la figura a continuación.



Si utilizamos conceptos de energía del cuerpo puntual, podemos considerar que en el instante inicial su energía mecánica es:

$$E_{M_0} = T_0 + \Phi_0 = \frac{1}{2} m\, v_0^2 \tag{7}$$

y en cualquier otro momento i, la energía mecánica del carro será:

$$E_{M_i} = T_i + \Phi_i = \frac{1}{2} m\, v_i^2 \tag{8}$$

Debido al teorema de conservación de la energía mecánica, sabemos que la variación de la energía mecánica del carro será igual al trabajo de la/s fuerza/s no conservativas presentes en el sistema. Esto es:

$$\Delta E_M = E_{M_i} - E_{M_0} = W_{FNC} \tag{9}$$

En este caso, la fuerza no conservativa presente que realiza trabajo es la fuerza de rozamiento dinámica. Su trabajo vendrá dado por:

$$W_{f_r} = -\mu_d\, N\, d_i \tag{10}$$

donde la normal N en este caso, por estar el cuerpo en un plano horizontal y no sometido a ninguna fuerza externa que no sea el peso, será igual a mg. La distancia d_i será en cada caso la distancia que recorra por el plano.

De esta forma, la ecuación (9) resulta:

$$\frac{1}{2} m\, v_i^2 - \frac{1}{2} m\, v_0^2 = -\mu_d\, mg\, d_i \tag{11}$$

la cual puede reordenarse de manera tal que:

$$v_i^2 = v_0^2 - 2g\, \mu_d\, d_i \tag{12}$$

Esta última relación nos permitirá determinar el coeficiente de rozamiento dinámico entre dos superficies en contacto, midiendo de forma directa la velocidad v_i de un carro a medida que se desplaza por una superficie una dada distancia d_i.

Para esto se utilizará el método de cuadrados mínimos visto en clases. La pendiente de la recta de regresión lineal, envuelve al coeficiente de rozamiento dinámico. Como la ecuación (12) también tiene un término independiente, aplicando el método de ajuste lineal podremos determinar de forma indirecta el valor de velocidad inicial v_0 del carro.

Materiales

Para realizar este experimento se utilizarán los siguientes materiales:

- Carro dinámico Pasco.
- Pista Pasco. Pies y topes.
- Lanzador a resorte de carros Pasco.
- 8 fotointerruptores y pies Pasco.
- GLX y adaptadores Pasco.
- Superficies para rozamiento.

Procedimiento experimental

Explique con sus palabras el procedimiento experimental desarrollado en el laboratorio. De considerarlo necesario, incluya un esquema (dibujo) del montaje experimental. Al escribirlo, piense que otra persona tendrá que leer sú texto, por lo que se guiará con sus indicaciones poder realizar el mismo experimento.

Mediciones experimentales

- Masa carro + superficie 1= (................ ± ....) [..........]
- Masa carro + superficie 2= (................ ± ....) [..........]

Superficie 1 : ....

- Velocidad inicial (directa) = (................ ± ....) [..........]

Distancia d_i **(**X_i**)** ($\pm$......) [......]	**Velocidad** (v_i) ($\pm$......) [......]	v_i^2 (Y_i) [......]

Superficie 2 : ....

- Velocidad inicial (directa) = (................ ± ....) [..........]

Distancia d_i **(**X_i**)** ($\pm$......) [......]	**Velocidad** (v_i) ($\pm$......) [......]	v_i^2 (Y_i) [......]

Resultados y discusión

Superficie 1

$\sum_{i=1}^{7} X_i =$................ [......] $\quad$ $\sum_{i=1}^{7} Y_i =$ .... [......] $\quad$ $\sum_{i=1}^{7} X_i Y_i =$ .... [......]

$\sum_{i=1}^{7} (X_i)^2 =$ .... [......] $\quad$ $D = 7 \cdot \sum_{i=1}^{7} (X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{7} X_i \right)^2 =$ ....[......]

- $A = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} (X_i)^2 \sum_{i=1}^{7} Y_i - \sum_{i=1}^{7} X_i \sum_{i=1}^{7} (X_i Y_i)}{D} =$ .... [......]

- $B = \dfrac{7 \sum_{i=1}^{7} (X_i Y_i) - \sum_{i=1}^{7} X_i \sum_{i=1}^{7} Y_i}{D} =$ .... [......]

Distancia d_i $(X_i)(\pm ......)$ [......]	v_i^2 (Y_i) [......]	$e_i = Y_i - (BX_i + A)$ [......]	e_i^2 [......]

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{7} e_i^2}{7}} = ...[......]$$

$$\sigma_B \approx \sigma_Y \sqrt{\frac{7}{D}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_B \approx ....[......]$$

$$\sigma_A \approx \sigma_Y \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{D}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_A \approx ....[......]$$

de forma que:

$$E_B = \frac{\sigma_B}{\sqrt{7}} \quad \longrightarrow \quad E_B = ...[......]$$

$$\text{Pendiente} \Rightarrow B \pm E_B \quad \longrightarrow \quad B = (................ \pm ....)[..........]$$

$$E_A = \frac{\sigma_A}{\sqrt{7}} \quad \longrightarrow \quad E_A = ...[......]$$

$$\text{Ordenada al origen} \Rightarrow A \pm E_A \quad \longrightarrow \quad A = (................ \pm ....)[..........]$$

Sabiendo que la pendiente B obtenida es igual a $-2g\,\mu_d$:

$$B = -2g\,\mu_d \quad \longrightarrow \quad \mu_d = \frac{B}{-2g}$$

Como μ_d se obtiene de una medición indirecta, para conocer su error asociado tenemos que utilizar la fórmula de cálculo de propagación de errores:

$$E_{\mu_d} = \left|\frac{\partial \mu_d}{\partial B}\right| |E_B| \quad \longrightarrow \quad E_{\mu_d} = \left|\frac{\quad}{\quad}\right| |E_B|$$

que en función de los valores ya obtenidos resulta:

$$E_{\mu_d} = ...$$

El coeficiente de rozamiento dinámico para la superficie 1, expresado correctamente es:

$$\mu_{\mathbf{d}} = (................ \pm ....)$$

Sabiendo que la ordenada al origen A obtenida es igual a v_0^2:

$$A = v_0^2 \quad \longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{A}$$

Como v_0 se obtiene en este caso de una medición indirecta, para conocer su error asociado tenemos que utilizar la fórmula de cálculo de propagación de errores:

$$E_{v_0} = \left|\frac{\partial v_0}{\partial A}\right| |E_A| \quad \longrightarrow \quad E_{v_0} = | \qquad\qquad ||E_A|$$

que en función de los valores ya obtenidos resulta:

$$E_{v_0} = \text{................}[\text{..........}]$$

La velocidad inicial obtenida de forma indirecta para el carro en la superficie 1, expresada correctamente es:

$$\mathbf{v_0} = (\text{................} \pm \text{................})[\text{..........}]$$

Superficie 2

$$\sum_{i=1}^{7} X_i = \text{................ [......]} \qquad \sum_{i=1}^{7} Y_i = \text{................ [......]} \qquad \sum_{i=1}^{7} X_i Y_i = \text{................ [......]}$$

$$\sum_{i=1}^{7} (X_i)^2 = \text{................ [......]} \qquad D = 7 \cdot \sum_{i=1}^{7} (X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{7} X_i\right)^2 = \text{................ [......]}$$

- $$A = \frac{\sum_{i=1}^{7}(X_i)^2 \sum_{i=1}^{7} Y_i - \sum_{i=1}^{7} X_i \sum_{i=1}^{7}(X_i Y_i)}{D} = \text{............................ [......]}$$

- $$B = \frac{7\sum_{i=1}^{7}(X_i Y_i) - \sum_{i=1}^{7} X_i \sum_{i=1}^{7} Y_i}{D} = \text{............................ [......]}$$

Distancia d_i $(X_i)(\pm\text{......})$ [......]	v_i^2 (Y_i) [......]	$e_i = Y_i - (BX_i + A)$ [......]	e_i^2 [......]

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{7} e_i^2}{7}} = \text{................}[\text{......}]$$

$$\sigma_B \approx \sigma_Y \sqrt{\frac{7}{D}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_B \approx \text{................}[\text{......}]$$

$$\sigma_A \approx \sigma_Y \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{D}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_A \approx \text{................}[\text{......}]$$

de forma que:

$$E_B = \frac{\sigma_B}{\sqrt{7}} \quad \longrightarrow \quad E_B = \text{................}[\text{......}]$$

$$\text{Pendiente} \Rightarrow B \pm E_B \quad \longrightarrow \quad B = (................ \pm ....)[..........]$$

$$E_A = \frac{\sigma_A}{\sqrt{7}} \quad \longrightarrow \quad E_A = ...[......]$$

$$\text{Ordenada al origen} \Rightarrow A \pm E_A \quad \longrightarrow \quad A = (................ \pm ....)[..........]$$

Sabiendo que la pendiente B obtenida es igual a $-2g\,\mu_d$:

$$B = -2g\,\mu_d \qquad \longrightarrow \qquad \mu_d = \frac{B}{-2g}$$

Como μ_d se obtiene de una medición indirecta, para conocer su error asociado tenemos que utilizar la fórmula de cálculo de propagación de errores:

$$E_{\mu_d} = \left|\frac{\partial \mu_d}{\partial B}\right| |E_B| \qquad \longrightarrow \qquad E_{\mu_d} = \left|\frac{\qquad}{\qquad}\right| |E_B|$$

que en función de los valores ya obtenidos resulta:

$$E_{\mu_d} = ...$$

El coeficiente de rozamiento dinámico para la superficie 2, expresado correctamente es:

$$\boldsymbol{\mu_\mathbf{d}} = (................ \pm ....)$$

Sabiendo que la ordenada al origen A obtenida es igual a v_0^2:

$$A = v_0^2 \qquad \longrightarrow \qquad v_0 = \sqrt{A}$$

Como v_0 se obtiene en este caso de una medición indirecta, para conocer su error asociado tenemos que utilizar la fórmula de cálculo de propagación de errores:

$$E_{v_0} = \left|\frac{\partial v_0}{\partial A}\right| |E_A| \qquad \longrightarrow \qquad E_{v_0} = | \qquad\qquad | |E_A|$$

que en función de los valores ya obtenidos resulta:

$$E_{v_0} = ...[..........]$$

La velocidad inicial obtenida de forma indirecta para el carro en la superficie 2, expresada correctamente es:

$$\mathbf{v_0} = (................ \pm ....)[..........]$$

Apellido y nombre:

Gráficos de ambas superficies

Análisis de resultados

Compare los resultados obtenidos para el valor de μ_d para las dos superficies estudiadas. ¿Qué superficie tiene un rozamiento mayor con la pista? ¿Cuál tiene mayor error absoluto? ¿Cuál resultó de mejor calidad? La masa del carro no fue tenida en cuenta. ¿Qué cree que pasaría si se le adiciona más masa al mismo? Agregue cualquier comentario/análisis que crea conveniente.

Compare los resultados obtenidos para las velocidades iniciales del carro. Esto es, para cada superficie, calcular el error relativo porcentual entre la velocidad inicial calculada de forma indirecta, con la obtenida por el registro de forma directa.

Superficie 1	**Superficie 2**
$e_{\%} = \frac{\lvert v0_{dir} - v0_{ind}\rvert}{v0_{dir}} \cdot 100$	$e_{\%} = \frac{\lvert v0_{dir} - v0_{ind}\rvert}{v0_{dir}} \cdot 100$
$e_{\%} =$	$e_{\%} =$

Agregue cualquier comentario/análisis que crea conveniente.