Apellido y nombre:

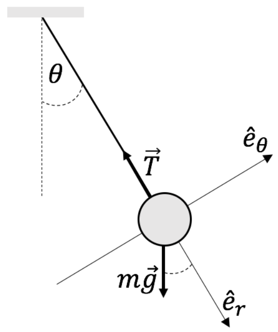
Recuperatorio - Laboratorios

Objetivos

• Afianzar conceptos de mediciones directas e indirectas, determinando las dimensiones y propiedades de un péndulo puntual.

• Repasar el método de ajuste por cuadrados mínimos, vinculando la longitud del péndulo con su período de oscilación.

Introducción teórica



Consideremos el diagrama de cuerpo aislado de un péndulo puntual de masa m, suspendido del techo mediante una cuerda de longitud L, y analicemos las fuerzas que actúan sobre la masa en el momento en el que la cuerda está separada de la vertical por un ángulo θ, como se muestra en la figura de la derecha.

Ubicando el sistema de coordenadas polares como se muestra en la figura, y teniendo en cuenta que las fuerzas sobre m son la tensión de la cuerda $\vec{T}$ y el peso de la misma $m\vec{g}$, las sumatorias de fuerzas de la segunda ley de Newton resultan:

$$\sum F_{\hat{e}_\theta}) \longrightarrow -m\,g\,sen\theta = m\,a_\theta = m\,L\,\ddot{\theta}$$

$$\sum F_{\hat{e}_r}) \longrightarrow m\,g\,cos\theta - T = m\,a_r = m\,(-L\,\dot{\theta}^2)$$

Bajo la consideración de oscilaciones a pequeños ángulos, es decir donde el ángulo θ no supere los 10°, el seno de θ podrá aproximarse simplemente como θ, y entonces:

$$-m\,g\,\theta \approx m\,L\,\ddot{\theta}$$

que reordenando nos sirve para demostrar que el péndulo cumple con la ecuación diferencial correspondiente a un movimiento armónico simple (M.A.S.):

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\,\theta = 0 \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega^2\,\theta = 0$$

La frecuencia angular de la oscilación del péndulo (ω) dependerá entonces únicamente de la longitud del mismo. Utilizando la relación entre el período de oscilación T y la frecuencia angular ω resulta:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \longrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Las magnitudes físicas que pueden medirse de forma directa en el laboratorio, son la masa y el diámetro de la esfera que se utilizará como masa del péndulo, el período de oscilación del mismo y la longitud de la cuerda con la cual se construye.

Para visualizar la utilidad del método de ajuste de cuadrados mínimos, obtenemos una relación entre dos de esas variables medidas de forma directa (período y longitud de la cuerda):

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L$$

y esta es la relación que nos va a servir para el tratamiento de los datos experimentales, identificando a la variable independiente (X_i) como la longitud de la cuerda del péndulo L y a la variable dependiente como el período de oscilación al cuadrado ($Y_i = T_i^2$). Como veremos más adelante, la longitud del péndulo se midió con un error relativo menor al que se obtuvo en la determinación del período de oscilación. Esto influye en la elección de quién es la variable independiente y cuál la dependiente, como vimos en la teoría del método.

Dentro de la pendiente de la recta que vincula T^2 con L está el valor de la gravedad g, cuya magnitud esperada es de $9.8\,m/s^2 = 980\,cm/s^2$. Este experimento nos servirá entonces para determinar de manera indirecta un valor experimental de la aceleración de la gravedad.

Materiales

Para realizar este experimento se utilizarán los siguientes materiales:

- Masa esférica o cilíndrica.
- Calibre y/o tornillo micrométrico.
- Cronómetro.
- Cuerda o hilo.
- Cinta métrica.
- Balanza.

Parte 1 - Caracterización del péndulo simple

Procedimiento experimental - Mediciones directas

En relación a las dimensiones del péndulo:

- Medir ancho y alto de la masa, en caso de trabajar con péndulo cilíndrico, o diámetro, en caso de elegir un péndulo esférico, con por lo menos dos instrumentos diferentes por cada medida: calibre, tornillo micrométrico y/o cinta métrica (pueden utilizar regla milimetrada).
- Utilizar la balanza disponible para determinar su masa.

Luego de colgar el péndulo en el soporte de la pared:

- Medir la longitud del péndulo 10 veces. (*Nota*: la longitud debe medirse desde donde se cuelga el péndulo hasta el centro geométrico de la masa suspendida).
- Registrar el período de oscilación del péndulo, con 2 observadores distintos.

Procedimiento experimental - Mediciones indirectas

A partir de las mediciones registradas anteriormente, y utilizando la teoría de propagación de errores, determinar el volumen y la densidad de la masa del péndulo.

Para la distancia L seleccionada, y con el uso de cronómetros, registrar el tiempo que tarda el péndulo en hacer 10 ciclos completos seguidos. El tiempo t obtenido será equivalente a 10 veces el período del sistema T ($t = T/10$).

Mediciones experimentales

Mediciones directas

- Masa m del péndulo = (................ ± ....) [..........]
- Geometría de la masa (esfera/cilindro) = ...
- Diámetro (D_1)= (................ ± ....) [..........] Instrumento 1: ....
  Diámetro (D_2) = (................ ± ....) [..........] Instrumento 2: ....
- Alto del cilindro (h_1) = (................ ± ....) [..........] Instrumento 1: ....
  Alto del cilindro ((h_2)) = (................ ± ....) [..........] Instrumento 2: ....

Longitudes L_i del péndulo (± ......) [......]				

- Tiempo de reacción (Observador 1): (................ ± ....) [..........]
- Tiempo de reacción (Observador 2): (................ ± ....) [..........]

- Período de oscilación (Observador 1): (................ ± ....) [..........]
- Período de oscilación (Observador 2): (................ ± ....) [..........]

Mediciones indirectas

- Tiempo en realizar 10 períodos consecutivos (Observador 1): (................ ± ....) [..........]
- Tiempo en realizar 10 períodos consecutivos (Observador 2): (................ ± ....) [..........]

Resultados, análisis y discusión

Mediciones directas

- Error relativo del diámetro (Instrumento 1): ....
- Error relativo del diámetro (Instrumento 2): ....

- Error relativo del alto (Instrumento 1): ....
- Error relativo del alto (Instrumento 2): ....

¿Qué instrumento recomienda para las medidas de las dimensiones de la masa del péndulo? Justifique.

- Error estadístico de la longitud del péndulo: ....
- **Longitud del péndulo**: (................ ± ....) [..........]

- Error relativo porcentual de la longitud del péndulo: ....

Mediciones indirectas

Expresión analítica para el cálculo del volumen de m:

Expresión analítica para el cálculo del error en el volumen de m:

Para el instrumento 1:

- **Volumen:** (................ ± ....) [..........]
- Error relativo del volumen: ....

Para el instrumento 2:

- **Volumen:** (................ ± ....) [..........]
- Error relativo del volumen: ....

Expresión analítica para el cálculo de la densidad ρ:

Expresión analítica para el cálculo del error en la densidad:

Para el instrumento 1:

• **Densidad:** (................. ± ....) [...........]

• Error relativo de la densidad: ....

Para el instrumento 2:

• **Densidad:** (................. ± ....) [...........]

• Error relativo de la densidad: ....

¿Qué instrumento recomienda para realizar la determinación del volumen de la masa del péndulo, en función de la geometría de la misma? Justifique. Según su valor obtenido de densidad, ¿de qué material puede tratarse? Justifique.

Expresión analítica para el cálculo del error absoluto asociado al período de oscilación:

Para el Observador 1:

• **Período de oscilación:** (................. ± ....) [...........]

• Error relativo del período: ....

Para el Observador 2:

• **Período de oscilación:** (................. ± ....) [...........]

• Error relativo del período: ....

¿Por qué considera más apropiado obtener el período de oscilación registrando 10 oscilaciones consecutivas y luego dividiendo por 10, que midiendo de forma directa 1 período?

¿Qué observador elegiría para realizar futuras experiencias asociadas al registro de tiempo? Justifique.

Parte 2 - Determinación experimental de la gravedad

Procedimiento experimental

Con el fin de poder realizar un análisis entre dos de las variables del sistema mediante el método de ajuste de cuadrados mínimos, se estudiará el comportamiento del período del péndulo en funcioón de su longitud para 6 longitudes diferentes de la cuerda. Por cada una de éstas se registrará el tiempo de 10 períodos de oscilación consecutivos. El péndulo se ajustará desde un soporte por el cual pasará el hilo que sostiene a la masa en su extremo, y acortarán las longitudes en partes proporcionales (por ejemplo, de a $15\,cm$ por vez). Para que siga valiendo la aproximación de pequeños ángulos, se deberá tener la precaución de no acortar la cuerda a una longitud menor a 1 metro. El registro de tiempo deberán hacerlo dos observadores en simultáneo.

Mediciones experimentales

- Tiempo de reacción (Observador 1): (................ ± ....) [..........]
- Tiempo de reacción (Observador 2): (................ ± ....) [..........]

Observador 1		Observador 2	
Longitud L_i ($\pm$......)[....]	10 Períodos t_i ($\pm$......)[....]	L_i ($\pm$......)[....]	t_i ($\pm$......)[....]

Resultados, análisis y discusión

Para el Observador 1:

L_i (X_i) ($\pm$......)[....]	t_i ($\pm$......)[....]	T_i $(t_i/10)$ ($\pm$......)[....]	T_i^2 (Y_i)[....]
			(±)
			(±)
			(±)
			(±)
			(±)
			(±)

$$\sum_{i=1}^{6} X_i = \text{....................} \text{ [......]} \qquad \sum_{i=1}^{6} Y_i = \text{....................} \text{ [......]}$$

$$\sum_{i=1}^{6} X_iY_i = \text{....................} \text{ [......]} \qquad \sum_{i=1}^{6} (X_i)^2 = \text{....................} \text{ [......]}$$

$$D = 6 \cdot \sum_{i=1}^{6} (X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{6} X_i \right)^2 = \text{....................} \text{ [......]}$$

- $A = \dfrac{\sum_{i=1}^{6}(X_i)^2 \sum_{i=1}^{6} Y_i - \sum_{i=1}^{6} X_i \sum_{i=1}^{6}(X_iY_i)}{D} = \text{.............................} \text{ [......]}$

- $B = \dfrac{6\sum_{i=1}^{6}(X_iY_i) - \sum_{i=1}^{6} X_i \sum_{i=1}^{6} Y_i}{D} = \text{.............................} \text{ [......]}$

L_i (X_i) [....]	T_i^2 (Y_i)[....]	$e_i = Y_i - (BX_i + A)$ [......]	e_i^2 [......]

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} e_i^2}{6}} = \text{................}[\text{......}]$$

$$\sigma_B \approx \sigma_Y \sqrt{\frac{6}{D}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_B \approx \text{................}[\text{......}]$$

$$\sigma_A \approx \sigma_Y \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{D}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_A \approx \text{................}[\text{......}]$$

de forma que:

$$E_B = \frac{\sigma_B}{\sqrt{6}} \quad \longrightarrow \quad E_B = \text{................}[\text{......}]$$

$$\text{Pendiente} \Rightarrow B \pm E_B \quad \longrightarrow \quad B = (\text{................} \pm \text{................})[\text{..........}]$$

$$E_A = \frac{\sigma_A}{\sqrt{6}} \quad \longrightarrow \quad E_A = \text{................}[\text{......}]$$

$$\text{Ordenada al origen} \Rightarrow A \pm E_A \quad \longrightarrow \quad A = (\text{................} \pm \text{................})[\text{..........}]$$

Sabiendo que la pendiente B obtenida es igual a $\frac{4\pi^2}{g}$:

$$B = \frac{4\pi^2}{g} \qquad \longrightarrow \qquad g = \frac{4\pi^2}{B}$$

Como g se obtiene de una medición indirecta, para conocer su error asociado tenemos que utilizar la fórmula de cálculo de propagación de errores:

$$E_g = \left|\frac{\partial g}{\partial B}\right| |E_B| \qquad \longrightarrow \qquad E_g = \left|\frac{\qquad}{\qquad}\right| |E_B|$$

que en función de los valores ya obtenidos resulta:

$$E_g = \text{................}[\text{..........}]$$

La aceleración de la gravedad obtenida por el Observador 1 expresada correctamente es:

$$\mathbf{g_1} = (\text{................} \pm \text{................})[\text{..........}]$$

Para el Observador 2:

L_i (X_i) $(\pm$......)[....]	t_i $(\pm$......)[....]	T_i $(t_i/10)$ $(\pm$......)[....]	T_i^2 (Y_i) [....]
			(±)
			(±)
			(±)
			(±)
			(±)
			(±)

$$\sum_{i=1}^{6} X_i = \text{....................} \ [......] \qquad \sum_{i=1}^{6} Y_i = \text{....................} \ [......]$$

$$\sum_{i=1}^{6} X_iY_i = \text{....................} \ [......] \qquad \sum_{i=1}^{6} (X_i)^2 = \text{....................} \ [......]$$

$$D = 6 \cdot \sum_{i=1}^{6} (X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{6} X_i \right)^2 = \text{....................} \ [......]$$

- $A = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} (X_i)^2 \sum_{i=1}^{6} Y_i - \sum_{i=1}^{6} X_i \sum_{i=1}^{6} (X_iY_i)}{D} = \text{.............................} \ [......]$
- $B = \dfrac{6 \sum_{i=1}^{6} (X_iY_i) - \sum_{i=1}^{6} X_i \sum_{i=1}^{6} Y_i}{D} = \text{.............................} \ [......]$

L_i (X_i) [....]	T_i^2 (Y_i) [....]	$e_i = Y_i - (BX_i + A)$ [......]	e_i^2 [......]

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} e_i^2}{6}} = \text{................}[......]$$

$$\sigma_B \approx \sigma_Y \sqrt{\frac{6}{D}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_B \approx \text{................}[......]$$

$$\sigma_A \approx \sigma_Y \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{D}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_A \approx \text{................}[......]$$

de forma que:

$$E_B = \frac{\sigma_B}{\sqrt{6}} \quad \longrightarrow \quad E_B = \text{................}[......]$$

$$\text{Pendiente} \Rightarrow B \pm E_B \quad \longrightarrow \quad B = (\text{................} \pm \text{................})[..........]$$

$$E_A = \frac{\sigma_A}{\sqrt{6}} \quad \longrightarrow \quad E_A = \text{................}[......]$$

$$\text{Ordenada al origen} \Rightarrow A \pm E_A \quad \longrightarrow \quad A = (................ \pm ....)[..........]$$

$$E_g = ...[..........]$$

La aceleración de la gravedad obtenida por el Observador 2 expresada correctamente es:

$$\mathbf{g_2} = (................ \pm ....)[..........]$$

Gráficos de ambos observadores

¿Qué observador obtuvo un valor más exacto de la aceleración de la gravedad? Justifique.

¿Qué observador tuvo una medición de mejor calidad de g? Justifique calculando los errores relativos de cada uno, esto es:

$$e_{r_{Obs1}} = \frac{E_{g_1}}{g_1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad e_{r_{Obs2}} = \frac{E_{g_2}}{g_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

entonces:

Compare los resultados obtenidos para el valor de g por los dos observadores, respecto del valor esperado para la gravedad ($g = 9.8\,m/s^2 = 980\,cm/s^2$). Para esto, calcule el error relativo porcentual:

$$e_{\%} = \frac{|g_1 - g|}{g} \cdot 100 \qquad\qquad e_{\%} = \frac{|g_2 - g|}{g} \cdot 100$$

$$e_{\%} = \qquad\qquad\qquad e_{\%} =$$

¿Qué puede decir de este método para determinar un valor experimental de g?