

TEORIA ESTADISTICA DE ERRORES

En la sección anterior evaluamos únicamente los errores de apreciación y los sistemáticos sin considerar los casuales. Vimos como los primeros pueden ser minimizados con un análisis cuidadoso del proceso de medición. En cuanto a los errores casuales su acotación es tema de este párrafo.

Para determinar la entidad de estos errores es necesario repetir la medición varias veces. Si los errores casuales son poco relevantes frente a los de apreciación las diferentes mediciones caerán dentro del intervalo de incerteza de cualquiera de ellas. Si esto sucede debemos concluir que los errores casuales son de orden menor que los de apreciación y por lo tanto estos son los que prevalecen. En caso contrario la dispersión de los valores medidos será mayor que el intervalo de incerteza debido a la apreciación, lo que nos plantea el problema de definir el centro de ese intervalo para aprovechar al máximo la precisión de un sistema de medición.

Por ejemplo, si medimos varias veces el período de un péndulo con un fotodiodo y un cronómetro digital con apreciación de $1/100$ s. veremos que la dispersión de las medidas no supera la apreciación del instrumento. En ese caso el error casual no es relevante. Si efectuamos la misma medida disparando el cronómetro manualmente vemos que la dispersión es considerablemente mayor que los 0,2 s. en los que se estima la apreciación.

Debe remarcarse el hecho de que el error en el valor medido, es decir el ancho del intervalo de incerteza, "no puede" ser reducido ya que este es inherente al proceso de medición. Obviamente no puede mejorarse la precisión de un instrumento, por ejemplo, midiendo con él varias veces. En todo caso estaremos más seguros de no cometer errores casuales.

Esta localización del intervalo de incerteza equivale a determinar el valor más probable de la serie de mediciones y al mismo tiempo determinar el número N de mediciones que haga su probabilidad lo suficientemente alta como para que no introduzca una incerteza del orden de la apreciación sino, más bien, una mucho menor.

Analizando una serie de valores vemos que los errores casuales aparecen distribuidos al azar. Las dos preguntas que nos planteamos ahora son las siguientes:

- Cómo obtenemos de esos N valores, el valor más representativo de la cantidad medida?
- Cómo calculamos el error absoluto de una sola medición?

Al efectuar una serie de mediciones de una misma cantidad, comprobamos que los errores casuales aparecen distribuidos al azar y, por lo tanto, obedecen a leyes de carácter estadístico (en forma similar que cuando tiramos un dado).

Como punto de partida se supone que no se cometen errores groseros y que los sistemáticos y los de apreciación han sido debidamente acotados lo que implica conocer el intervalo de incerteza de cada medición individual y que el proceso de medición ha sido depurado. Estas suposiciones deben confirmarse antes de hacer un análisis estadístico ya que los errores casuales son, en general, pequeños frente a los anteriores.

La teoría estadística de errores es debida a Gauss. Haremos un desarrollo resumido de la misma con el objeto de justificar las ecuaciones que vamos a utilizar en la práctica. La demostración de cada una de estas ecuaciones se puede encontrar en textos de estadística.

Enunciaremos tres postulados básicos:

- **Postulado I:** Dada una serie de mediciones: X_1, X_2, \dots, X_N , la mejor estimación de la magnitud medida, o valor más probable de la misma, es el promedio aritmético de todas las mediciones de esa cantidad, efectuadas en las mismas condiciones.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$$

- **Postulado II:** Es igualmente probable cometer errores del mismo valor numérico y distinto signo.
- **Postulado III:** En una serie de mediciones, es tanto más probable un error cuanto menor es su valor absoluto.

Estos postulados debidos a Gauss, aunque son intuitivos, son de difícil demostración, salvo el primero (ver *ROEDERER*) La experiencia demuestra que en la práctica son correctos aunque no exentos de objeciones teóricas.

Contestando entonces a la primera pregunta que nos habíamos planteado, por el *Postulado I* el valor más representativo de la cantidad medida, el que tomaremos como valor medido, es \bar{X} .

En cuanto a la calidad de la medición, esta será tanto mejor cuanto más parecidas sean entre sí las lecturas X_i , o, dicho de otra manera, más parecidas al valor medio \bar{X} .

La calidad de la medición será tanto mejor cuanto menor sea el intervalo de incerteza asociado a ella. Pero...¿cómo definir este intervalo de incerteza?. Para desarrollar esta idea definamos *desviación* de una lectura..

Llamamos \mathcal{E}_i a la *desviación* de cada medición respecto del valor medio \bar{X}

$$\mathcal{E}_i = \bar{X} - X_i$$

Tenemos entonces N valores de \mathcal{E}_i ; la suma de los \mathcal{E}_i , no tiene significado físico porque, por ser \bar{X} el promedio, tenderá a ser igual a cero ya que las desviaciones de signo opuesto se compensan mutuamente. Si en cambio sumamos los cuadrados de estas desviaciones, esta magnitud será más representativa y nos dará una medida de cómo fluctúan los valores individuales alrededor del promedio.

Pero la $\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i^2$ tiene el inconveniente de depender del número de mediciones N. Para independizarnos de este número N, definimos la *varianza*:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i^2}{N}$$

como el promedio de las desviaciones cuadráticas, que depende únicamente de la forma en que los datos individuales fluctúan alrededor del promedio.

Sin embargo las dimensiones físicas de V son las de los datos originales elevados al cuadrado. Por lo tanto definimos la raíz cuadrada de la varianza

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{X} - X_i)^2}{N}}$$

σ tiene las dimensiones de X y se la puede comparar numéricamente. Se la llama *Dispersión ó Desvío Estándar de Cada Medición, ó Error Medio Cuadrático de las Lecturas*.

σ depende sólo del proceso de medición y nos da una idea cabal y precisa de la fluctuación o dispersión de los valores de X_i alrededor del promedio.

Definimos la *Desviación Relativa*:

$$e_r = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

y *Desviación Relativa Porcentual*:

$$e_r \% = \frac{\sigma \cdot 100}{\bar{X}}$$

La desviación relativa (que no tiene dimensiones) es la magnitud que pone de manifiesto con más claridad el concepto de dispersión.

Efectivamente, cuando decimos que tenemos una medición cuya dispersión es del 10 %, tenemos mayor información sobre la calidad de la medición que si decimos que el desvío estándar es de 10 cm, ya que éste último puede indicar una buena medición si lo que estamos midiendo es del orden de 20 m o muy mala si medimos una longitud de 20 cm.

Conceptualmente la *dispersión* σ refleja la probabilidad de que una nueva medición individual, se aparte en mayor o menor medida del valor medio calculado pero, puesto que el objetivo es lograr información intercambiable, es decir, que pueda ser replicada y utilizada por otro (o el mismo) observador midiendo, en las mismas condiciones, una nueva serie de valores de la misma magnitud, debemos establecer en qué medida el valor medio que se obtenga puede apartarse del obtenido anteriormente.

Se puede demostrar que, cuando se trata de errores casuales, la dispersión estándar de los promedios es:

$$E = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

σ es el desvío estándar de cada una de las series de N mediciones, ya que el orden de magnitud de σ es el mismo para todas las series.

Este resultado tiene una importancia fundamental, ya que permite predecir la fluctuación del promedio de una serie de N mediciones, sin necesidad de realizar M series.

Al valor de “E” lo llamamos *Error Estándar del Promedio ó Error Medio Cuadrático de los Promedios*.

IMPORTANTE

- σ , el error medio cuadrático de las lecturas, es independiente de N y es representativo de la calidad del proceso de medición.
- “E”, en cambio, es el error medio cuadrático de los promedios, depende del número N y siempre es menor que σ .
- Físicamente, “E” da el orden de magnitud con el cual podemos esperar que el promedio habrá de fluctuar alrededor del verdadero valor de la magnitud en cuestión, en caso de que hiciéramos más series de mediciones. En definitiva es el grado de confiabilidad de \bar{X} .

- El error que se calcula por medio de la expresión $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ define, entonces, un intervalo de inseguridad de ancho $2E$, alrededor del valor medio \bar{X} , dentro del cual debería encontrarse el valor de \bar{X} en cualquier serie de mediciones posterior. Este intervalo deberá ser menor que la incerteza debida a la apreciación del proceso de medición pero, puesto que “E” depende de N , no debe ser tan pequeño que implique un número exagerado de determinaciones. Se acepta que es adecuado un 10 % de ese valor.

CONCLUSIONES:

De los puntos anteriores surgen los siguientes hechos destacables:

- La suma de los errores aparentes en una serie de mediciones es nula.
- El error medio cuadrático σ es una medida de la calidad del instrumento de medición y de la habilidad del observador.
- Cuando el número de observaciones es suficientemente grande, el valor medio de los cuadrados de una serie de valores que son sensiblemente iguales entre sí, es constante. Surge que:
- La dispersión o error medio cuadrático σ de una serie de mediciones se mantiene constante cuando el número de observaciones es suficientemente grande. Esto confirma la afirmación inicial de que la dispersión de una medición depende de la precisión de las mediciones individuales y permite afirmar que σ sólo puede disminuirse utilizando instrumentos de creciente precisión (los que son resultado del constante avance científico y tecnológico) o mejorando el proceso de medición.
- “E” disminuye cuando aumenta el número de observaciones (N). Esto se debe a que σ permanece sensiblemente constante de lo podría suponerse que el error “E” puede hacerse tan chico como se desee con solo aumentar suficientemente el número de observaciones. Sin embargo, no tiene sentido disminuir “E” más allá de la apreciación E_{AP} del instrumento de medición o, en el mejor de los casos de $E_{AP}/10$. El resultado de una medición en la que $E \ll E_{AP}$ no es una información intercambiable pues no indica la real confiabilidad de la medición (que en última instancia está determinada por la apreciación del instrumento de medición utilizado). Por lo tanto, si se quiere alcanzar el límite de información obtenible con un instrumento determinado, hay que calcular el número de lecturas N que hacen $E < E_{AP}$ (a lo sumo $0.1 E_{AP}$).

Podremos decir entonces que la expresión del resultado de una serie de mediciones es:

$$X = \bar{X} \pm E$$

La mayor precisión que busca la metrología científica en una medición exige instrumentos cada vez más perfeccionados y no un aumento indiscriminado del número de observaciones.

Con una regla milimetrada no se puede obtener un resultado en micrones.

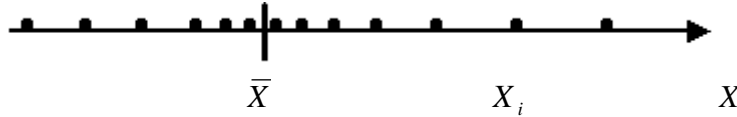
Como el error “E” es inversamente proporcional a \sqrt{N} para ganar una cifra significativa en el valor más probable se debería pasar de $N = 10$ a $N = 1000$ mediciones, pero hacer esto plantearía dudas respecto de la constancia de la magnitud a medir durante un tan largo proceso de medición. Resulta más conveniente mejorar el instrumento, o el método, que aumentar el número de mediciones.

Es preferible obtener 20 buenas medidas y no mil mediocres

HISTOGRAMA DE UNA MEDICION

Sea X una cantidad física que ha sido medida un número N de veces en las mismas condiciones. Si los errores que afectan las mediciones son casuales, las observaciones experimentales aparecen distribuidas aleatoriamente alrededor del promedio \bar{X} .

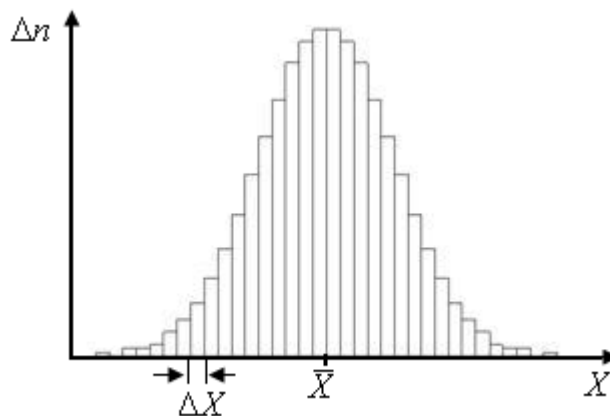
Representando en un eje los valores de X_i , se obtiene una distribución de este tipo:



Si dividimos el eje X en pequeños intervalos ΔX , podemos contar el número de observaciones Δn que caen en cada intervalo y representarlo gráficamente en función de X .

Esto es lo que se llama un *Histograma* (cuando a todo un intervalo le corresponde un valor, y no uno solo por punto, como sucede en una función continua). Cuando más grande es N , más pequeños podemos hacer los intervalos ΔX sin por ello perder la chance de tener un número suficientemente grande Δn de datos en cada intervalo.

La experiencia demuestra que, para todos los casos de errores casuales que responden a los postulados de Gauss, el histograma que se obtiene puede ser aproximado por una función continua bien definida y única cuya forma es siempre la misma, dependiendo sólo de dos parámetros que podrán variar de caso en caso.



Se comprueba experimentalmente que el número de mediciones que caen en un intervalo, depende del valor de X y de la longitud del intervalo ΔX en la forma aproximada:

$$\Delta n = \frac{N \cdot \Delta X \cdot \frac{e^{-(\bar{X}-X_i)^2}}{2 \cdot \sigma^2}}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}$$

La aproximación es tanto mejor cuanto mayor sea N y cuanto más pequeño sea ΔX .

Esta relación se denomina "distribución de Gauss" y los eventos que responden a ella se llaman por eso "gaussianos".

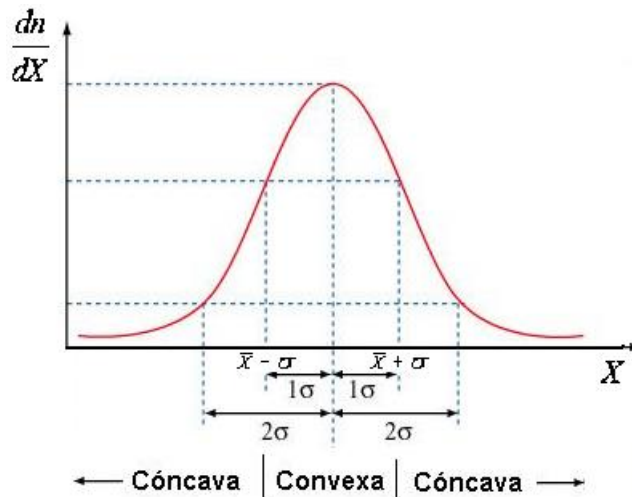
Como se ve, aparecen dos parámetros: σ y \bar{X} (N no es estrictamente un parámetro, pues no modifica la forma de la curva; es un factor de escala). Se puede demostrar que σ es lo que anteriormente habíamos llamado desviación estándar de cada medición y \bar{X} es el valor medio.

La expresión:

$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{\Delta X} = \frac{dn}{dX} = \frac{N \cdot e^{-\frac{(\bar{X}-X)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}$$

se llama *densidad de observaciones*. La variable X que figura en el exponente ubica el intervalo en el cual se cuentan las observaciones. La representación gráfica de la densidad de observaciones se llama *Curva ó Campana de Gauss*.

La distribución, que da el número de observaciones en función de X , es la integral de esta función.



Presenta un máximo en $X = \bar{X}$. Es simétrica respecto de ese valor medio, tiene forma de campana y sus puntos de inflexión están en $\bar{X} \pm \sigma$. El área debajo de la curva entre los extremos $\bar{X} - \Delta X$ y $\bar{X} + \Delta X$ da el número Δn de valores con una diferencia menor o igual a ΔX respecto de \bar{X} .

La probabilidad de encontrar valores con ese ΔX (o menor) se obtiene dividiendo Δn por el número total de valores N .

En particular la $\int \frac{dn}{N}$ entre $\bar{X} + \sigma$ y $\bar{X} - \sigma = 0,68$ es decir, la probabilidad de que, efectuado el mismo número N de mediciones el \bar{X} caiga en ese intervalo es del 68 %.

Obviamente la integral entre $+\infty$ y $-\infty$ será igual a uno.

No en todos los procesos de medición los datos se distribuyen de acuerdo con una curva de Gauss. Muchas veces, errores sistemáticos u otras condiciones físicas "distorsionan" la distribución de Gauss, sea haciendo aparecer muchos más datos de un lado del promedio que del otro (distribución asimétrica), o introduciendo "cortes" en sus extremos.

La forma cualitativa más simple de verificar si una distribución de datos dada es gaussiana es comparar el histograma obtenido con la curva de distribución de Gauss teórica correspondiente.

Para ello veamos brevemente como se procede para trazar la curva de distribución y el histograma de una serie de datos experimentales.

Ante todo, es conveniente elegir bien el intervalo ΔX . Debe ser pequeño, pero no demasiado, pues sino caerán muy pocos datos en cada uno. Ello requiere un poco de experiencia y tanteo. Una vez elegido ΔX , se representa el histograma.

De los valores calculados \bar{X} y σ , y del valor de N y ΔX se calcula numéricamente Δn para algunos valores X_i y se lo representa gráficamente.

Si la distribución es Gaussiana, la curva ajustará más o menos bien con el histograma. Cuanto mayor sea N , tanto mejor deberá ser el acuerdo.

Una verificación adicional consiste en evaluar el número de valores experimentales en el intervalo $\bar{X} + \sigma$, $\bar{X} - \sigma$. Cuanto más se aproximen al 68% mejor será el ajuste.

Para que todo esto sea válido los intervalos ΔX deben ser iguales.

Muchas veces un accidente, de la más variada naturaleza, comenzando por una distracción del operador, hace que se incluyan en la medición lecturas equivocadas.

Supongamos que se mide una cantidad, se calcula su promedio \bar{X} y su error medio cuadrático "E". Al observar las lecturas individuales (admitamos un total de $N = 20$, por ejemplo) se advierte una con una desviación $X > 3\sigma$. Como la probabilidad de que aparezca una lectura con ese error es menor que 0,3% o sea 3 lecturas de cada 1000, es altamente improbable que con sólo 20 lecturas ya se haya producido ese error (no es imposible, es sólo muy poco probable), y se acepta que es más probable que se trate de una equivocación que de un error casual. En consecuencia se la desecha, y se vuelven a calcular \bar{X} y "E" sin ese valor.

BIBLIOGRAFIA:

MECANICA ELEMENTAL - Juan Roederer

INTRODUCCION A LAS MEDICIONES DE LABORATORIO -Maistegui-Gleiser

TEORIA DE ERRORES DE MEDICIONES - Cernuschi y Greco

MEDICIONES ELECTRICAS - Juan Sábato

Ejemplo de Aplicación

Se desea dibujar el histograma para la serie de 30 valores de la altura (m) de los estudiantes de un curso que se detallan en la siguiente tabla:

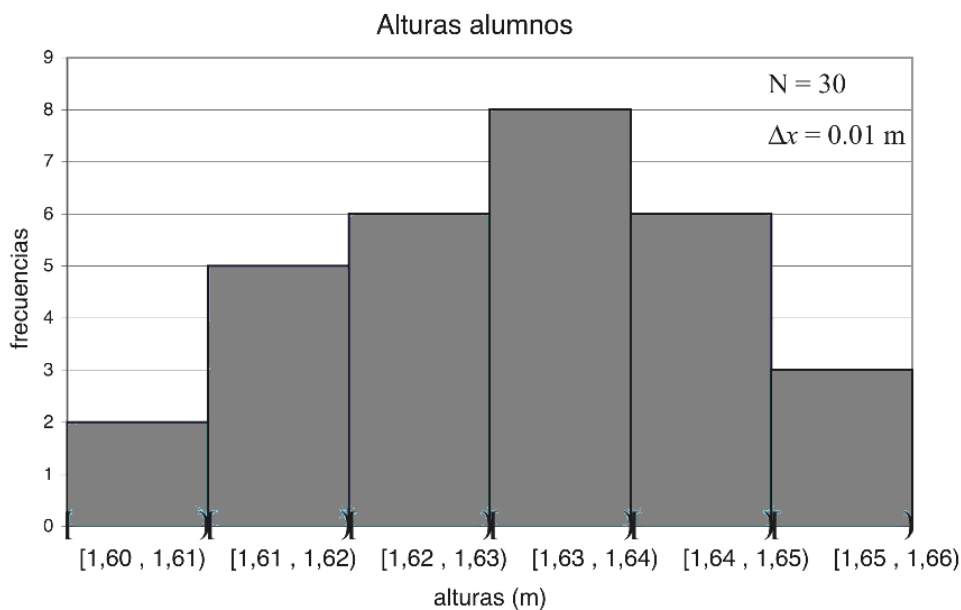
1,61	1,63	1,62	1,61	1,63	1,64	1,60	1,64	1,63	1,61
1,64	1,62	1,63	1,60	1,65	1,64	1,61	1,62	1,63	1,64
1,63	1,65	1,61	1,62	1,65	1,62	1,63	1,64	1,63	1,62

Vemos que la apreciación del instrumento es 0,01 m .

Hacemos una tabla correspondiente a los intervalos y sus frecuencias

Intervalos (m)	frecuencia
[1,60 , 1,61)	2
[1,61 , 1,62)	5
[1,62 , 1,63)	6
[1,63 , 1,64)	8
[1,64 , 1,65)	6
[1,65 , 1,66)	3

El histograma se realiza haciendo para cada intervalo una columna tan alta como la frecuencia de valores asociada correspondiente



Construcción de una Campana de Gauss.

Se desea construir la campana de Gauss para la serie de N = 30 valores anteriores. Para ello es necesario calcular previamente el valor medio de la serie y la desviación estándar:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} = 1,63 \text{ m}$$

$$\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\sum_i \varepsilon_i^2 / N} = \sqrt{\sum_i (\bar{x} - x_i)^2 / N} = 0,014 \text{ m} \cong 0,01 \text{ m}$$

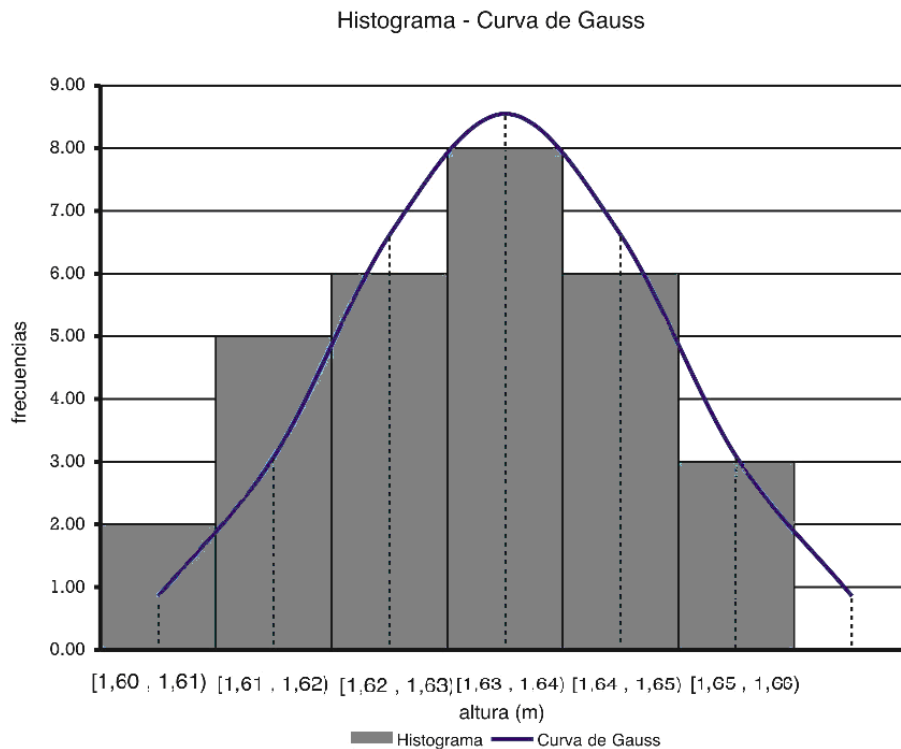
Entonces, siendo $\Delta n \cong \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\bar{x} - x_i)^2}{2\sigma^2}\right) \Delta x$ y $\Delta x = 0,01 \text{ m}$ se obtiene

Tabla: Valores para construir la Campana de Gauss.

x_i	Valor	$\exp(-(\bar{x} - x_i)^2 / 2\sigma^2)$	Δn
\bar{x}	1,63 m	1	8,55 m
$\bar{x} - \sigma/2$	1,625	$e^{-1/8}$	7,54 m
$\bar{x} + \sigma/2$	1,635 m	$e^{-1/8}$	7,54 m
$\bar{x} - \sigma$	1,62 m	$e^{-1/2}$	5,18 m
$\bar{x} + \sigma$	1,64 m	$e^{-1/2}$	5,18 m
$\bar{x} - 2\sigma$	1,61 m	e^{-2}	1,16 m
$\bar{x} + 2\sigma$	1,65 m	e^{-2}	1,16 m

Con lo cual la gráfica queda de la siguiente forma

Observación: La curva de Gauss por si sola no es útil para sacar una conclusión; es por ello que se superpone con el histograma de la serie respectiva. Por ejemplo, un corrimiento hacia la izquierda o la derecha de la curva de Gauss respecto del histograma indica que hay errores sistemáticos además de los casuales.



Nota: El valor medio y la desviación estándar de la serie han sido calculados con la calculadora en modo SD insertando los datos de la serie acorde a cada modelo y marca. También podrían ser utilizado algún software que realice tales cálculos.