Nociones básicas sobre incertezas en las mediciones

El proceso de medición forma parte de nuestro cotidiano y a diario nos encontramos con diferentes medidas de diversas magnitudes. La *medición* es un proceso que consiste en comparar un patrón elegido (como el metro, el kilo, el segundo, el amperio, etc.) con un objeto o fenómeno, que tenga una magnitud física de iguales características a éste, para poder así calcular cuántas veces el patrón está contenido en esa magnitud en especial.

Cada vez que intentamos determinar el valor de una magnitud mediante una medición, introducimos en el proceso un error. En el laboratorio se suele hablar del *error de medición* cuando se refiere a la *incerterza de la medición* y es la que dará noción de la confiabilidad que se tiene respecto a una determinada medición.

Entonces, podemos resumir las características de cada proceso de medición como:

Proceso de medición: Consiste en comparar una cantidad de una magnitud que se quiere conocer con una cantidad patrón conocida. Dentro de este proceso se puede distinguir la intervención de tres sistemas:

- *Sistema Objeto:* es aquello que se desea medir.
- *Sistema de Medición:* es el instrumento que se utiliza para realizar la medición.
- *Sistema de Comparación:* es la unidad patrón.

El instrumento (sistema de medición) primero es comparado con la unidad patrón (sistema de comparación) en un proceso que se conoce como *calibración*. Luego, se usa al instrumento para compararlo con el sistema objeto. De esta manera se tendrá una comparación del sistema objeto con la unidad patrón, lo que se conoce finalmente como *medición*.

Mediante el proceso de medición se intenta conocer el valor de una dada *magnitud* física, la cual se entiende como:

Magnitud: es todo aquello que puede ser medido y cuantificado: longitud, masa, tiempo, etc.. Las emociones, por ejemplo, como el amor, el odio o la ansiedad, no pueden ser cuantificados. Aunque se pueda tener mucho amor, poco odio o demasiada ansiedad, es claro que *mucho*, *poco* o *demasiado* no son valores cuantificables. Mientras que, por ejemplo, 3 metros, 1 kilogramo o 60 segundos si son cuantificaciones de las magnitudes longitud, masa y tiempo, respectivamente.

Al realizar un proceso de medición se tendrán en cuenta:

Cantidad de una magnitud: es el valor que cuantifica la magnitud medida. En el ejemplo anterior, 3, 1 y 60 son las *cantidades* que cuantifican a las magnitudes longitud, masa y tiempo, respectivamente.

Unidad: es una cantidad conocida y utilizada como patrón, que da una noción del tamaño de la cantidad. En el ejemplo dado en la definición de magnitud: metros, kilogramos y segundos serían las unidades de las variables longitud, masa y tiempo, respectivamente. Sin la unidad, la cantidad carece de sentido. No es lo mismo decir que se llegará a un lugar en 5 minutos que en 5 horas, por lo que el valor 5 por si solo no puede ser asociado a ningún *tamaño*.

Apreciación del sistema de medición: Es la menor división de la escala que presente el sistema. Por ejemplo, en una regla la menor división es un milímetro, entonces tiene una apreciación de $1\,mm$. Un cronómetro con apreciación de $0.01\,s$ fracciona el tiempo intervalos equivalentes a la centésima parte de un segundo. Una balanza digital cuyo último dígito corresponde a la milésima de gramo, tiene $10^{-3}\,g$ de apreciación.

Estimación de una medición: Es el menor intervalo que un observador puede determinar. Esto puede mejorar o empeorar la apreciación del sistema. Si el observador olvidó usar sus lentes y no distingue bien las divisiones de la regla o, por lo contrario, si su vista es buena y tanto las divisiones de la regla como el los bordes del objeto están bien definidos, podría interpolar una distancia intermedia entre la menor división del instrumento. La reacción del observador al operar un cronómetro suele ser mucho mayor que la apreciación del instrumento. Estos son algunos ejemplos de estimación.

El **resultado** de toda medición (X), **expresado correctamente**, estará conformado por:

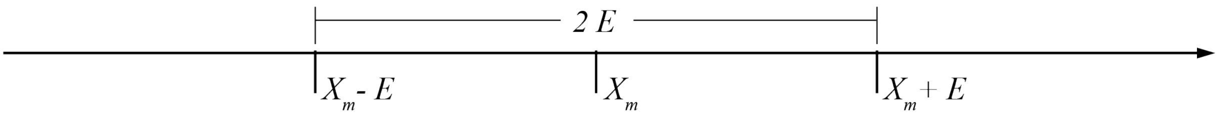
- una cantidad asociada a la magnitud en cuestión conocida como *valor medido* (X_m),
- una *incerteza* o *error absoluto* asociado a la cantidad (E) y
- la *unidad* patrón ($[U]$) a la que se hace referencia,

quedando definido correctamente como:

$$X = (X_m \pm E)[U] \tag{1}$$

Cabe destacar que ningun valor que no esté conformado como el de la ecuación (1), no se puede considerar como el resultado de una medición.

A partir del concepto de *error de medición* como sinónimo de *intervalo de incerteza*, puede pensarse a la magnitud medida (X_m) como el valor que define el centro del intervalo de incerteza (ver figura a continuación). Dicho intervalo tendrá un ancho de dos veces el error absoluto ($2E$), una vez hacia la izquierda y una vez hacia la derecha, donde el valor verdadero al que se desea llegar se espera que esté contenido en tal intervalo. Medir implica conocer un intervalo de incierto, $(X_m - E, X_m + E)$, donde el valor deseado puede ser cualquiera dentro de éste.



A pesar de la infinidad de procesos de medición que existen, y que cada uno de estos sea único en si mismo (por lo que no es posible establecer criterios generales sino que se debe analizar cada caso en particular), es necesario categorizarlos de alguna manera para poder abordar teorías para el análisis de sus intervalos de incerteza o, lo que es lo mismo, para conocer su error absoluto. Aquí se presentarán algunas divisiones genéricas para enmarcar los errores que pueden cometerse al medir:

Errores groseros: Pueden cometerse por una equivocación del operador o una falla del sistema. Por ejemplo, el operador se demora al dar inicio al cronómetro, una basura obstruye el paso de un vehículo sobre una pista en su movimiento, el observador cuenta mal el número de oscilaciones de un péndulo, quien observa lee un valor en la escala y anota otro, entre otros.

Tratamiento: Pueden ser evitados poniendo cuidado y repitiendo las mediciones y los cálculos. Sus valores obtenidos deben ser descartados.

Errores sistemáticos: Se cometen constantemente por el método de medición. Por ejemplo, una balanza descalibrada pesará siempre una misma cantidad mayor/menor.

Tratamiento: Si se identifica un error de este tipo, puede ser eliminado (en el ejemplo de la balanza descalibrada, podrá restarse/sumarse un valor determinado a cada medición para corregirlo).

Errores accidentales, aleatorios o casuales: Aún habiendo eliminado los errores groseros y los sistemáticos al máximo, el proceso de medición seguirá dando valores diferentes al repetir el mismo experimento.

Tratamiento: Estos errores son imposibles de predecir y dada su naturaleza aleatoria, suelen ser tratados con herramientas estadísticas. En este curso, el tratamiento de los errores casuales seguirá la teoría estadística de errores basada en tres postulados realizados por Gauss:

- Dada una serie de N mediciones $x_1, x_2, ...x_N$, la mejor estimación de la magnitud medida, o valor más probable de la misma, es el promedio aritmético de todas las mediciones de esa cantidad, efectuadas en las mismas condiciones. Esto es:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

- Es igualmente probable cometer errores del mismo valor numérico y distinto signo.

- En una serie de mediciones, es tanto más probable un error cuanto menor es su valor absoluto.

Se dice que la calidad de una medición será tanto mejor cuanto más parecidos sean entre sí los valores medidos, o dicho de otra forma, más parecidos al valor medio $\overline{x}$. La calidad de la medición, entonces, será tanto mejor cuanto menor sea el intervalo de incerteza asociado a ella. Para establecer un intervalo de incerteza adecuado se define primeramente la *desviación* de una lectura respecto del valor medio:

$$\epsilon_i = \overline{x} - x_i$$

Se tendrán entonces N valores de ϵ_i. Se define a partir de esto la *varianza* $\mathcal{V}$, que es una magnitud independiente del número de mediciones N y se expresa como:

$$\mathcal{V} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \epsilon_i^2}{N}$$

Como puede verse la varianza es el promedio de las desviaciones cuadráticas, que depende únicamente de la forma en que los datos individuales fluctúan alrededor del promedio. La *dispersión* o *desvío estándar* σ de cada medición resulta:

$$\sigma = \sqrt{\mathcal{V}} = \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \epsilon_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (\overline{x} - x_i)^2}{N}}$$

Esta σ depende sólo del proceso de medición y nos da una idea cabal y precisa de la fluctuación o dispersión de los valores de x_i alrededor del promedio. Conceptualmente la dispersión σ refleja la probabilidad de que una nueva medición individual, se aparte en mayor o menor medida del valor medio calculado.

Se puede demostrar que, cuando se trata de errores casuales, la dispersión estándar de los promedios es:

$$E_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Éste será el estimador del error asociado a $\overline{x}$ y es llamado ***error estadístico***. Da el orden de magnitud con el cuál el promedio habrá de fluctuar alrededor del "verdadero valor" de la magnitud en cuestión y se mantendrá casi constante cuando el número de observaciones es suficientemente grande. Como E_σ depende de N y es menor si se aumenta el número de mediciones, es posible disminuir el error estadístico pero nunca, desde el punta de vista físico, el error de $\overline{x}$ puede ser cero. Sólo puede hacerse igual o del orden del error de apreciación del instrumento utilizado para realizar la medición.

Ejemplos de errores:

- *Causados por el observador:* Cada observador tiene una forma particular de usar e interpretar los instrumentos de medición. Si un observador que mide varias veces el período de un péndulo, tiene una tendencia de disparar el cronómetro antes (o después) del punto de referencia, estará introduciendo un error al proceso de medición. Puede también ocurrir que tenga alguna distracción en algún momento, por lo que cometerá un error grosero, y por último existirán distintas fluctuaciones que ya no pueden identificarse que serán los errores aleatorios.
- *Propios del instrumentos:* Si se debe a su calibración, como una construcción defectuosa de la escala o un corrimiento permanente de la misma, serán errores del tipo sistemático. Puede que tenga alguna falla momentánea como una balanza a batería donde se agota su carga y/o la baja de tensión provocará mediciones o lecturas erróneas, que serán errores groseros.

- *Debidos al modelo que describe el fenómeno físico:* Cuando se considera la masa del péndulo como puntual, por ejemplo, se desprecia la masa del hilo, se considera que a pequeños ángulos $sen\theta \approx \theta$ y que el movimiento ocurre en un plano, entonces el período (T) del mismo resulta:

$$T = 2\,(L/g)^2$$

  donde L es la longitud del péndulo y g la aceleración de la gravedad. El resultado es un modelo con muchas aproximaciones y si por ejemplo damos un ángulo grande al sistema, se estará fuera del rango de validez del modelo.

- *Causados por el propio acto de medir:* Al tomar la temperatura de un objeto, tanto el sistema de medición como el sistema objeto se ponen en contacto hasta que ambos alcancen la misma temperatura. Si el termómetro usado es comparable en tamaño con el objeto, la lectura del termómetro no será la deseada, ya que ambos sistemas habrán convergido a una temperatura promedio diferente de la del sistema objeto, como se desea.

Los errores deben ser evaluados para poder acotar su incerteza y encontrar un error global, o error absoluto, de cada medición. Como se mencionó, medir es sinónimo de comparar, y esto puede suceder tanto de forma directa (comparando directamente la magnitud del sistema objeto con la magnitud del sistema de medición), como de manera indirecta (donde la magnitud deseada es obtenida a partir de relaciones con otras magnitudes), como se verá a continuación.

Mediciones directas: Se refiere a la lectura directa de cierta cantidad de una magnitud física mediante un instrumento de medición. Medir una longitud con una regla, la masa de un objeto con una balanza, un intervalo de tiempo con un cronómetro, son ejemplos donde se compara directamente a la magnitud con el instrumento de medición.

Error absoluto de las mediciones directas: No existe una receta general para establecer el valor del error en ninguna medición, por lo que es necesario analizar cada sistema completo, el modelo físico y todo lo que esté involucrado en el proceso de medición. En el caso de identificar más de un error en un proceso de medición, como pueden ser el error de apreciación del instrumento usado (E_{ap}), un error de estimación del observador (E_{est}) y un error estadístico producto de realizar la misma medición varias veces (E_σ), entre otras fuentes de error, el error absoluto (E) será obtenido de la siguiente manera:

$$E = \sqrt{(E_{ap})^2 + (E_{est})^2 + (E_\sigma)^2 + \dots} \qquad (2)$$

Ejemplo: un operador que acciona el cronómetro para medir el tiempo en que un objeto tarda en caer, tiene un retardo de $0.14\,s$, mientras que la apreciación del instrumento es de $0.05\,s$. Entonces, el error de estimación debido al retardo del observador será $E_{est} = 0.14\,s$ y el error de apreciación del instrumento $E_{est} = 0.05\,s$, por lo que el error absoluto será:

$$E = \sqrt{(E_{ap})^2 + (E_{est})^2} = \sqrt{(0.05\,s)^2 + (0.14\,s)^2} \approx 0.15\,s$$

y si el tiempo medido fue de $1.8\,s$, el resultado se expresará de la siguiente manera:

$$t = (1.80 \pm 0.15)\,s$$

Observaciones importantes:

- No es correcto expresar $t = (1.8 \pm 0.15)\,s$, ya que deben coincidir el número de decimales del error absoluto con el del valor medido.
- Si bien para la matemática $1.8 = 1.80$, en las mediciones no lo es ($1.8 \neq 1.80$). Decir 1.80 significa que se puede medir hasta la centésima y que éste valor fue medido como cero en las centésimas, mientras que 1.8 significa que se puede medir hasta la décima y que ésta es 8 décimas.

- Se tomará como criterio que el error se exprese con, a lo sumo, dos cifras significativas, esto es:

Error absoluto	
Obtenido	Criterio
$\pm 12\,cm$	$\pm 12\,cm$
$\pm 1.5\,mm$	$\pm 1.5\,mm$
$\pm 0.05\,kg$	$\pm 0.05\,kg$
$\pm 0.035\,s$	$\pm 0.035\,s$
$\pm 1798\,g$	$\pm 1800\,g$
$\pm 1.36\,^\circ$	$\pm 1.4\,^\circ$
$\pm 0.4592\,^\circ C$	$\pm 0.46\,^\circ C$

Suponga un error de tres cífras significativas, como sería $\pm 111\,cm$. El primer número representa al 100, que representa un 90 % del error, el segundo número (10) representa al 9 % del error y el último representará al 0.9 % del error total, lo cuál será despreciado según el criterio aquí adoptado.

Mediciones indirectas: Una cantidad de una cierta magnitud medida indirectamente se obtiene mediante la utilización de una relación físico-matemática que la vincula con otras magnitudes que pueden ser medidas de forma directa. Por ejemplo, para determinar la rapidez que lleva un auto que se mueve en una trayectoria rectilínea de forma uniforme, basta con medir la distancia recorrida (d) por el mismo en un tiempo t. Mediante la relación $v = d/t$ se puede determinar su rapidez.

Error absoluto de las mediciones indirectas: Primero deben medirse aquellas magnitudes que pueden compararse directamente con el instrumento. Se deberán calcular los errores absolutos asociados a dichas mediciones directas, para luego usar estos valores para determinar el error absoluto de la magnitud medida en forma indirecta.

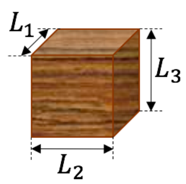
De manera general, supóngase que la magnitud Z no puede medirse directamente, por lo que deberá determinarse de forma indirecta a través de una relación ($Z = f(X, Y, U, \dots)$) que dependa de las variables X, Y, U, ..., las cuales pueden ser obtenidas por mediciones directas y que tendrán sus correspondientes errores absolutos, E_X, E_Y, E_U, ...

Al proceso de encontrar el error de la magnitud Z (E_Z) a partir de los errores E_X, E_Y, E_U, ..., se lo conoce como ***propagación de errores***. En general se deduce del desarrollo en serie de Taylor de la función Z en un entorno a los valores medidos, X_m, Y_m, U_m, ..., donde el incremento de las variables será el error absoluto de cada una de estas ($\triangle X = (X - X_m) = E_X$, $\triangle Y = (Y - Y_m) = E_Y$, $\triangle U = (U - U_m) = E_U$, ...). Despreciando los términos de segundo orden en adelante, y sumando en valor absoluto cada término del desarrollo de la serie de Taylor, para asegurarse que no se resten errores entre si, se llega a:

$$E_Z = \left|\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_m, Y_m, U_m, \dots} |E_X| + \left|\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{X_m, Y_m, U_m, \dots} |E_Y| + \left|\frac{\partial f}{\partial U}\right|_{X_m, Y_m, U_m, \dots} |E_U| + \dots \tag{3}$$

Al sumar los términos en valor absoluto se están sumando las incertezas consecutivas, por lo que se tiene mayor seguridad de que el valor de la medición estará dentro del intervalo del error absoluto.

Ejemplo: Suponga que desea calcular el volumen de un cubo de madera como el de la figura, para lo cual miden cada uno de sus lados de longitud L_1, L_2 y L_3. Entonces, la función que le permitirá conocer el valor del volumen es:



$$V = L^3 = L_1 L_2 L_3$$

El error asociado al cálculo del volumen de forma indirecta, por lo visto anteriormente, será:

$$E_V = \left|\tfrac{\partial V}{\partial L_1}\right|_{L_{m_i}} |E_{L_1}| + \left|\tfrac{\partial V}{\partial L_2}\right|_{L_{m_i}} |E_{L_2}| + \left|\tfrac{\partial V}{\partial L_3}\right|_{L_{m_i}} |E_{L_3}|\ ; \qquad \text{con } i = 1,\, 2,\, 3$$

$$E_V = |L_2 L_3||E_{L_1}| + |L_1 L_3||E_{L_2}| + |L_1 L_2||E_{L_3}|$$

Si ahora se quisiera determinar la densidad del bloque, podría medirse su masa m y obtenerla de forma indirecta mediante la función:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{L_1 L_2 L_3}$$

con un error absoluto asociado calculado como:

$$E_\rho = \left|\tfrac{\partial \rho}{\partial m}\right|_{L_{i_m}, m_m} |E_m| + \left|\tfrac{\partial \rho}{\partial L}\right|_{m_m, L_{i_m}} |E_{L_1}| + \left|\tfrac{\partial \rho}{\partial L}\right|_{m_m, L_{i_m}} |E_{L_2}| + \left|\tfrac{\partial \rho}{\partial L}\right|_{m_m, L_{i_m}} |E_{L_3}|; \qquad \text{con } i = 1,\, 2,\, 3$$

$$E_\rho = \frac{1}{L_{1_m} L_{2_m} L_{3_m}} |E_m| + \left| - \frac{m}{L_{1_m}^2 L_{2_m} L_{3_m}} \right| |E_{L_1}| + \left| - \frac{m}{L_{1_m} L_{2_m}^2 L_{3_m}} \right| |E_{L_2}| + \left| - \frac{m}{L_{1_m} L_{2_m} L_{3_m}^2} \right| |E_{L_3}|$$

Otro ejemplo: La distancia d sobre la pista que recorrió Usain Bolt cuando batió el record mundial se determinó en $d = 100.005\, m$ con una cinta métrica (apreciación de $0.001\, m$). El tiempo que tardó en completar la carrera fue de $t = 9.63\, s$, siendo registrado el mismo por un juez que usó un cronómetro (con una apreciación de $0.01\, s$), con un tiempo de reacción del juez de $0.14\, s$. Calcule la velocidad promedio que llevó Bolt en la carrera y exprese correctamente el resultado.

Recordando que la velocidad media puede expresarse como:

$$V_m = \frac{d}{t}$$

entonces la velocidad que llevó Bolt en promedio es:

$$V_m = \frac{100.005\, m}{9.63\, s} = 10.3847352025...\tfrac{m}{s}$$

Para el cálculo del error en la velocidad media, deberá realizarse la propagación de errores:

$$E_{V_m} = \left|\tfrac{\partial V_m}{\partial d}\right|_{t_m} |E_d| + \left|\tfrac{\partial V_m}{\partial t}\right|_{d_m, t_m} |E_t|$$

$$= \left|\frac{1}{t_m}\right| |E_d| + \left| - \frac{d_m}{t_m^2} \right| |E_t|$$

El error absoluto en la distancia ($|E_d|$) será directamente el de apreciación de la cinta métrica, $0.001\, m$. El error absoluto asociado al tiempo medido, tiene dos fuentes de error: la apreciación del instrumento ($0.01\, s$) y el error de estimación introducido por el observador, mediante su tiempo de reacción ($0.14\, s$). Entonces:

$$|E_t| = \sqrt{E_{ap}^2 + E_{est}^2} = \sqrt{(0.01\, s)^2 + (0.14\, s)^2} = 0.14035668847...\, s \approx 0.14\, s$$

Tomando hasta dos cifras significativas en error absoluto del tiempo será:

$$E_t = 0.14\, s$$

Como se puede observar, el error absoluto en el tiempo es prácticamente el error cometido por el observador E_{est}, debido a su tiempo de reacción, siendo la apreciación del instrumento despreciable frente a él.

Teniendo en cuenta estos valores, el error absoluto en la velocidad media será:

$$E_{V_m} = \left|\frac{1}{9.63\, s}\right| |0.001\, m| + \left| - \frac{100.005\, m}{(9.63\, s)^2} \right| |0.14\, s|$$

$$E_{V_m} = |0.000104...\, m/s| + |-0.150972...\, m/s| = 0.151076...\, m/s \approx 0.15\, m/s$$

Tomando hasta dos cifras significativas en error absoluto en la velocidad media será:

$$E_{V_m} = 0.15\, m/s$$

La medición indirecta de la velocidad media, expresada correctamente, resulta de esta manera igual a:

$$V_m = (10.38 \pm 0.15)\, m/s$$

Error relativo: Se define como el error absoluto (E) comparado con el valor medido (X_m) de la siguiente forma:

$$e = E/X_m \tag{4}$$

el cual es útil para dimensionar cuán grande es la incerteza en relación al tamaño de la cantidad que se esté midiendo.

En el ejemplo de Usain Bolt, el error relativo resulta: $e = 0.15\, m/s/10.38\, m/s = 1.4 \times 10^{-2}$.

Error relativo porcentual: Es el error relativo multiplicado por el factor $100\,\%$:

$$e_{\%} = e\,100\,\% = (E/X_m)\,100\,\% \tag{5}$$

y es usado, al igual que el error relativo, para poder dimensionar el tamaño del intervalo de incerteza en relación al tamaño de la cantidad medida. Al ser porcentual suele ser más fácil su comparación y discusión. Si se mide con una regla con $1\, mm$ de apreciación un objeto de $10\, cm$ de longitud y no se cometen mas errores que el de apreciación del instrumento, de forma que su error absoluto sea $E = 0.1\, cm$, entonces el error relativo porcentual será

$$e_{\%} = e\,100\,\% = (0.1\, cm/10\, cm)\,100\,\% = (0.01)\,100\,\% = 1\,\%$$

y el observador estará familiarizado directamente con el tamaño respecto a la cantidad al hablar en porcentaje respecto de la misma.

En el ejemplo de Usain Bolt, el error relativo porcentual resulta: $e_{\%} = 1.4 \times 10^{-2}\,100\,\% = 1.4\,\%$.

Exactitud de una medición: Una medida será tanto más exacta cuando menor sea el intervalo de incerteza, es decir, cuanto menor sea su error absoluto. Por ejemplo, si se mide el diámetro de una barra cilíndrica (D) con dos instrumentos diferentes (con distintas apreciaciones):

$$\begin{aligned} D_1 &= (75.54 \pm 0.02)\, mm \\ D_2 &= (75.5\ \ \pm 0.5)\, mm \end{aligned}$$

la medición con el instrumento de $0.02\, mm$ de apreciación es más exacta que la segunda medida con apreciación de $0.5\, mm$.

Calidad de una medición: Se refiere directamente a cuánto representa el error absoluto en relación al tamaño de la cantidad medida, es decir a su error relativo (o su error relativo porcentual). Cuanto menor sean estos errores, mayor será la calidad de la medición. Por ejemplo, si se mide la longitud de una barra cilíndrica (L) y su diámetro (Φ) con una regla milimetrada de $0.5\, mm$ de error absoluto,

$$\begin{aligned} L &= (599.5 \pm 0.5)\, mm & e_{\%L} &\approx 0.08\,\% \\ \Phi &= (14.5\ \ \pm 0.5)\, mm & e_{\%\Phi} &\approx 3.45\,\% \end{aligned}$$

la medición del largo es de mayor calidad que la del diámetro. Si se midiera al diámetro con un sistema de mayor exactitud

$$L = (14.64 \pm 0.02)\, mm \qquad\qquad e_{\%L} \approx 0.14\,\%$$

a pesar de tener mayor exactitud que la medición del largo, seguirá siendo de menor calidad en este caso.