Dinámica – Movimiento curvilíneo

Debemos relacionar dinámica con cinemática!!!!!

Coordenadas intrínsecas

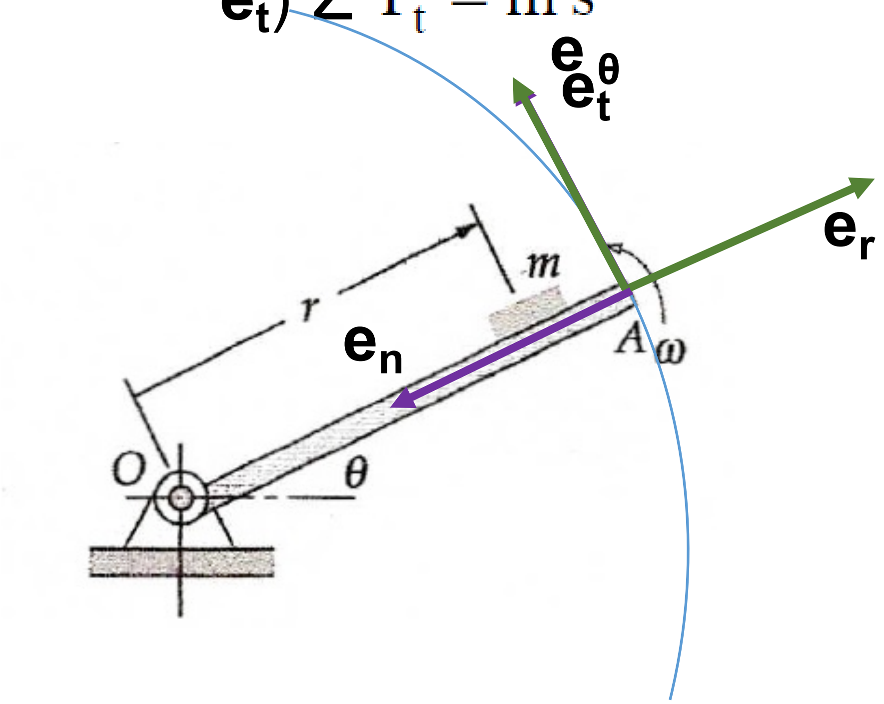
$$e_n)\ \Sigma\ F_n = m\frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

$$e_t)\ \Sigma\ F_t = m\,\ddot{s}$$

Coordenadas polares

$$e_r)\ \Sigma\ F_r = m(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)$$

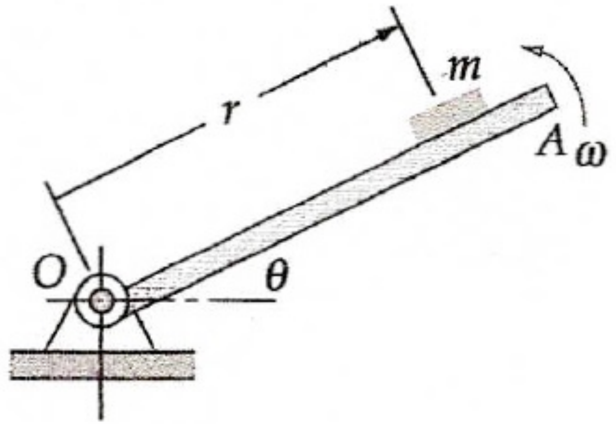
$$e_\theta)\ \Sigma\ F_\theta = m(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})$$



Ejemplo 1

Problema 27

La barra OA gira con una velocidad angular antihoraria constante de 3 rad/seg. Cuando pasa por la posición $\theta = 0$ se le coloca un pequeño bloque de masa m a una distancia radial de 0.45 m. Se observa que el bloque comienza a resbalar para $\theta = 50°$.

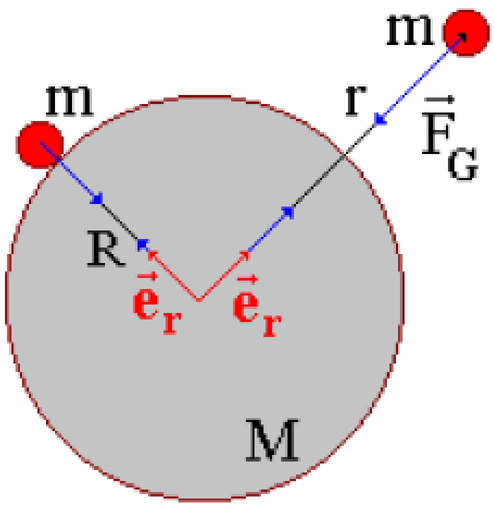


a)Realizar diagrama de cuerpo aislado para el cuerpo de masa m cuando $\theta < 50°$.

b)Hallar el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la barra.

c)¿Cuál es la trayectoria de dicho cuerpo mientras $\theta < 50°$?

Interacción gravitatoria



$$\vec{F} = -G\,\frac{mM}{r^2}\,\vec{e}_r$$

$$\vec{F} = -G\,\underbrace{\frac{M_T}{R_T^2}}\,m\,\vec{e}_r$$

$$M_T = 5.972\times10^{24}\ \text{kg}$$

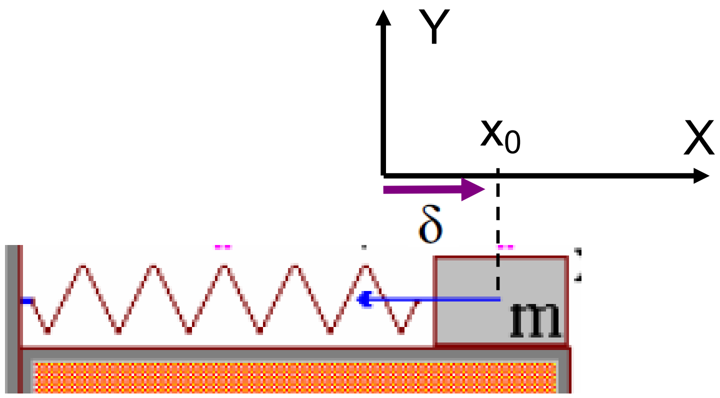
$$R_T = 6.371\times10^{6}\ \text{m}$$

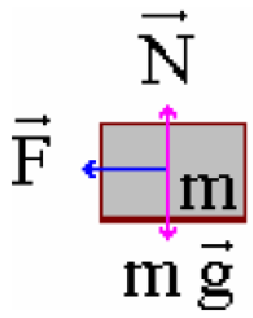
$$G = 6.674\times10^{-11}\ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}}$$

$$g = G\,\frac{M_T}{R_T^2} \cong 9.81\ {}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$$

Interacción elástica con un resorte lineal

$$\boxed{\vec{F} = -k\,\vec{\delta}}$$





origen XY → cuerpo en equilibrio (resorte sin deformar)

$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$$

deformación

i) $-k\,x = m\,\ddot{x}$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{m}\,x}$$

Movimiento Armónico Simple

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frecuencia angular

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$

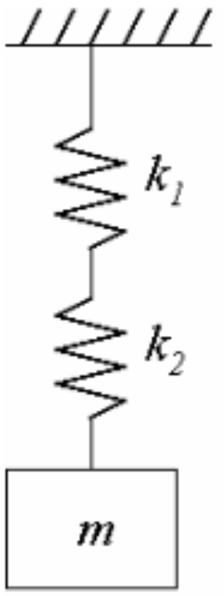
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

la frecuencia y período son independientes de la amplitud y de las condiciones iniciales

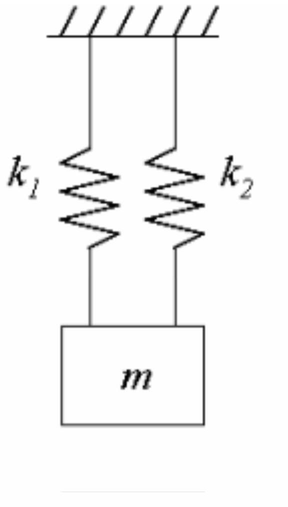
Problema 33 (guía de dinámica)

Dos masas idénticas sujetas a resortes iguales están sobre una superficie libre de rozamiento. Un resorte se estira 10 cm y el otro 5 cm. Si se sueltan al mismo tiempo (y desde el reposo), ¿Cuál de los dos cuerpos alcanza primero la posición de equilibrio (sin deformar)? Graficar cualitativamente y en un mismo gráfico la posición en función del tiempo para cada masa.



Resortes en serie

$$\boxed{k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$



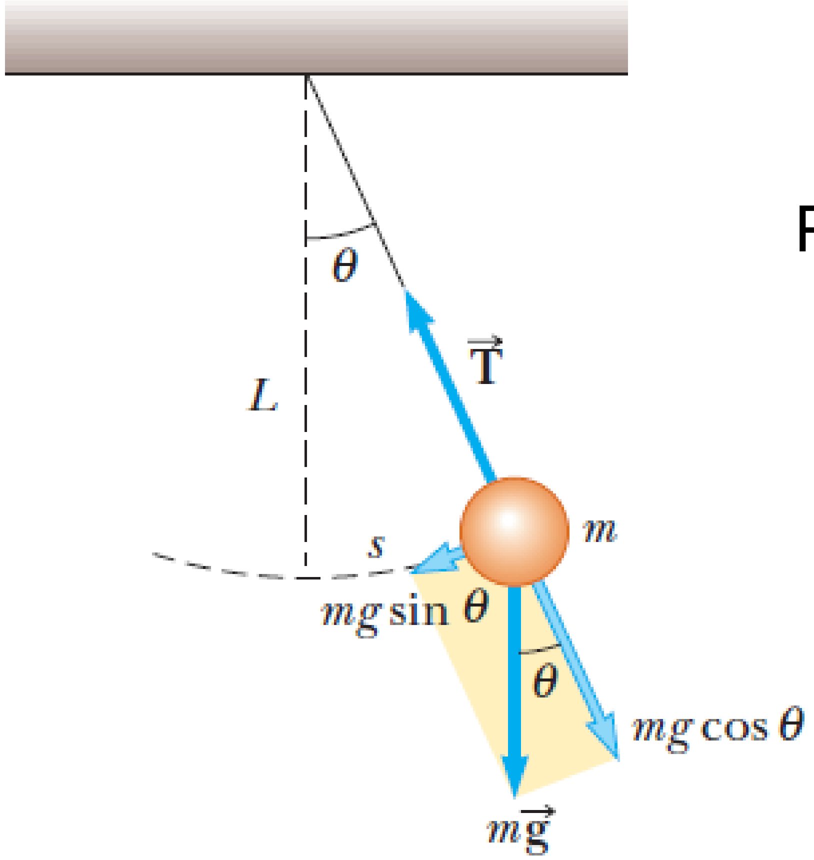
Resortes en paralelo

$$\boxed{k_{eq} = k_1 + k_2}$$

mas rígido

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

En paralelo el periodo es menor y la frecuencia mayor



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

Para pequeñas oscilaciones $\sin\theta \approx \theta$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta}$$

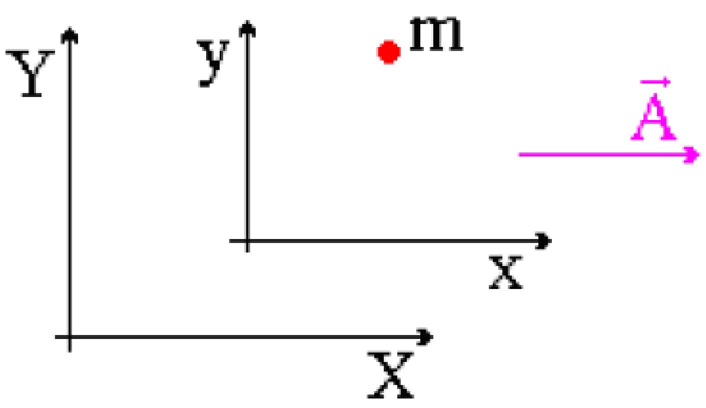
MAS

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

El periodo y la frecuencia solo dependen de la longitud del péndulo y de g, no dependen de la masa!!!!

Ni de las condiciones iniciales!!!!



Sistema de Referencia INERCIAL

ley de Newton

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{a}_{XYZ}}$$

Acá va la aceleración del objeto medida en el sistema ¨fijo¨

Sistema de Referencia NO INERCIAL

fuerzas inerciales

$$\boxed{\vec{f}^{\,*} = -\,m\vec{A}_{XYZ}}$$

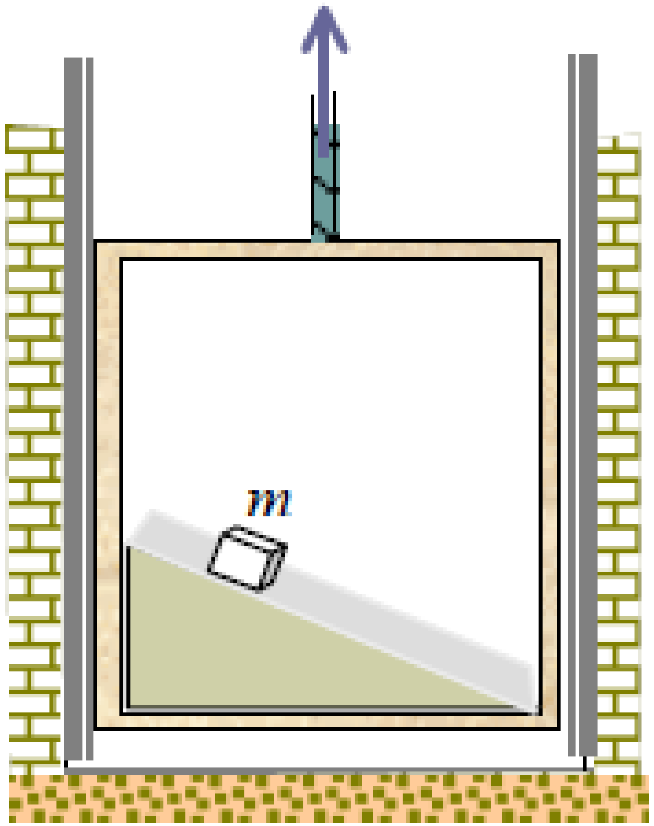
aceleración del SRNI xyz

$$\boxed{\vec{F} + \vec{f}^{\,*} = m\,\vec{a}_{xyz}}$$

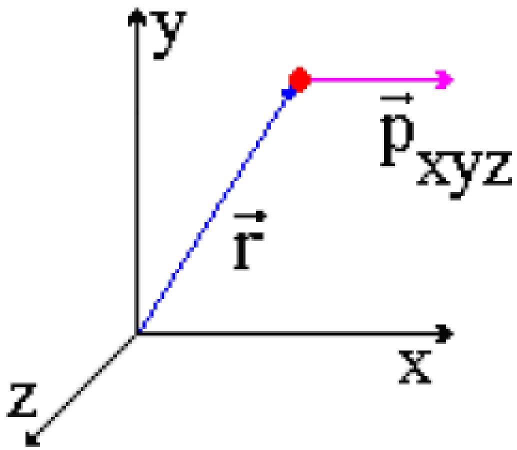
y acá va la aceleración del objeto medida en el sistema ¨acelerado¨

Ejemplo 2

Un plano inclinado un ángulo θ = 30º, se encuentra en el interior de un ascensor que sube con aceleración constante igual a (1/8) g . Un cuerpo de masa m se deja caer desde el extremo superior y desliza sin rozamiento. Calcular la aceleración del bloque para un observador dentro del ascensor y para otro en una sistema de referencia inercial fijo al piso.



Cantidad de movimiento



$$\boxed{\vec{p}_{xyz} = m\vec{v}_{xyz}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Resultante de las fuerzas

En un sistema aislado $\mathbf{P}_{\mathbf{total}}$ = cte

Impulso de la resultante

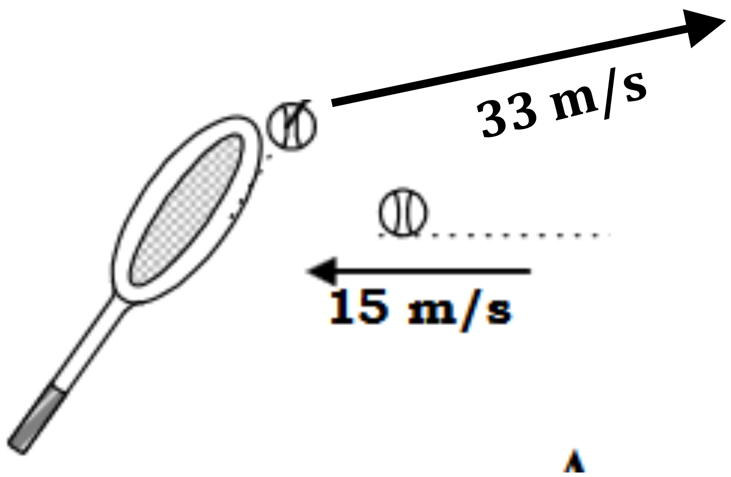
$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}\,dt = \Delta\vec{p}}$$

Repaso energía

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{i)}\ \ I_x = m\,(v_{2x} - v_{1x}) \\ \\ \textbf{j)}\ \ I_y = m\,(v_{2y} - v_{1y}) \end{array} \right.$$

Ejemplo 4

Una pelota de tenis de 180 g lleva una rapidez horizontal de 15 m/s cuando es golpeada por la raqueta. Si inmediatamente después del impacto la pelota sale con una velocidad de 33 m/s en una dirección de 25º con la horizontal,

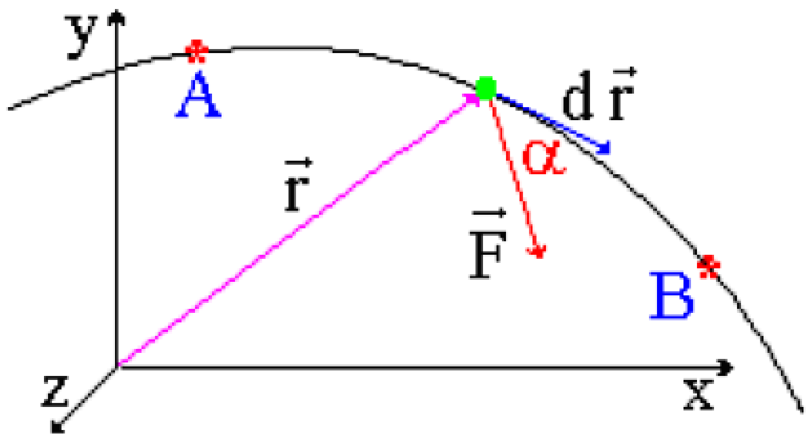


a) Determine el impulso neto de la raqueta sobre la pelota.

b) Si la pelota permanece en contacto con la raqueta 10^{-2} s, cuál es el módulo de la fuerza promedio ejercida durante el golpe.

Trabajo mecánico

El trabajo depende de la trayectoria



$$W_{A,B} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$W_{A,B} = \int_A^B \underbrace{F\cos\alpha}_{} \; ds$$

Componente
tangencial de la fuerza

Explicá si realizas, o no, trabajo cuando:

a) Empujas una pared

b) Sostenes un libro a 2 metros de altura

c) Desplazas un carrito hacia delante

Pero si F conservativa

El trabajo es independiente del camino

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\left[\Phi\,(\vec{r}_b) - \Phi\,(\vec{r}_a)\right]$$

función energía potencial

Energía potencial gravitatoria (corto alcance)

$$\boxed{\Phi_{gc}(r) = mgy}$$

Cuando una partícula **sube**
gana energía potencial gravitatoria

Energía potencial elástica

$$\boxed{\varphi_{el} = \frac{1}{2}kx^2}$$

a mayor deformación
gana energía potencial elástica

Campos de fuerzas conservativos

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\left[\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)\right]$$

independiente del camino

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla\Phi}$$

$$\boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}}$$

Sirve para comprobar que un campo de fuerza es conservativo!!

Teorema de las Fuerzas Vivas

$$\boxed{W_{AB} = \Delta T = T_B - T_A}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

energía cinética

trabajo que realiza la resultante de las fuerzas

Energía mecánica del sistema

$$\boxed{E = T + \Phi}$$

$$\boxed{W_{NC}{}^{AB} = E_B - E_A}$$

Teorema de conservación de la energía mecánica:

Si $W_{NC}=0$ $\boxed{E = E_\circ}$

Problema 9 (guía de energía)

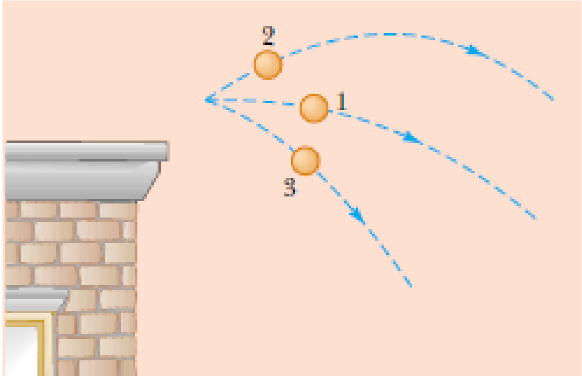
Una persona sostiene una valija con su mano mientras camina a velocidad constante sobre una superficie horizontal. ¿La fuerza que la persona ejerce con su mano realiza trabajo? ¿Y si subiera una escalera a velocidad constante?

Problema 18 (guía de energía)

¿Cuándo una fuerza es conservativa? Expresar el trabajo que realiza una fuerza conservativa en función de su energía potencial

Problema 20 (guía de energía)

Tres bolas idénticas se lanzan desde la parte superior de un edificio, todas con la misma velocidad inicial. La primera bola se lanza horizontalmente, la segunda a cierto ángulo sobre la horizontal y la tercera a cierto ángulo por debajo de la horizontal. Ignore la resistencia del aire y compare las velocidades de las bolas cuando llegan al piso.



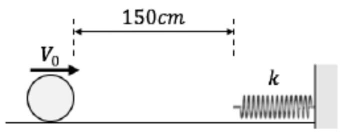
Problema 22 (guía de energía)

Las fuerzas constantes son conservativas. Puesto que la fuerza de rozamiento dinámica para un cuerpo desplazándose en una superficie horizontal no cambia de magnitud ¿Debería ser una fuerza conservativa?

trabajo total → $\boxed{W_{AB} = \Delta T = T_B - T_A}$ $\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2}$ ***Repaso***

trabajo de las fuerzas NO conservativas → $\boxed{W_{NC}^{AB} = E_B - E_A}$ $\boxed{E = T + \Phi}$

Problema 16. Un cuerpo de masa 5 kg apoyado sobre una mesa horizontal es lanzado para interactuar con un resorte de constante elástica $k = 100\,N/m$. La superficie tiene un coeficiente de rozamiento estático de 0.4, y dinámico de 0.25. Inicialmente el cuerpo está a 150 cm del resorte.



a) Determine con qué velocidad debe lanzarse el cuerpo para que la compresión máxima del resorte sea 50 cm.

b) Para la situación planteada en a) determine la energía disipada hasta el instante de máxima compresión.

c) Determine si el cuerpo puede o no iniciar el retroceso.

d) Si puede iniciar el movimiento, determine la velocidad que tiene al finalizar la interacción elástica y a qué distancia del punto de lanzamiento se detiene.

e) Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas involucradas desde que es lanzado hasta que queda finalmente detenido.

f) Verifique que el trabajo total coincide con la variación de la energía cinética.

Problema 17. Frenando abruptamente, un auto deja marcas de 65 metros de longitud. El coeficiente de rozamiento dinámico entre las ruedas y el asfalto es $\mu_d = 0.71$.

a) Halle la velocidad con la cual se trasladaba el auto antes de aplicar los frenos.

b) Si se determina experimentalmente que la distancia de frenado fue de $(65.5 \pm 0.5\,m)$ y la masa del auto es de $(2000 \pm 5)\,kg$, encuentre el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento durante el frenado, y exprese el resultado en notación científica, con un error con dos cifras significativas (despreciando el error en la magnitud del coeficiente de rozamiento).

c) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración con que frena?

Problema 21. Dos bloques están unidos por una cuerda inextensible como se muestra en la figura (a). Si el sistema parte del reposo, determine la velocidad del bloque A después de que se ha desplazado 2 metros. Suponga que entre el bloque A y el plano el coeficiente de rozamiento $\mu = 0.25$ y que la polea es de peso despreciable y sin rozamiento. Resuelva el mismo problema para el caso de la figura (b).

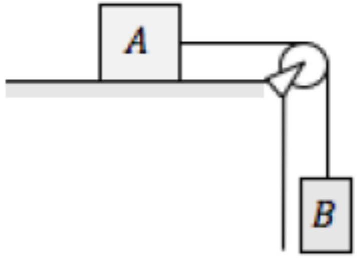


Figura (a)

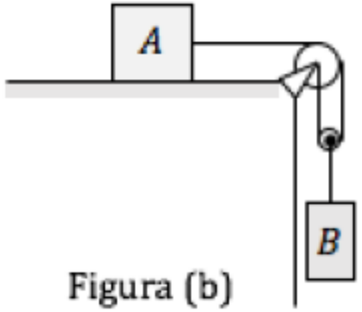
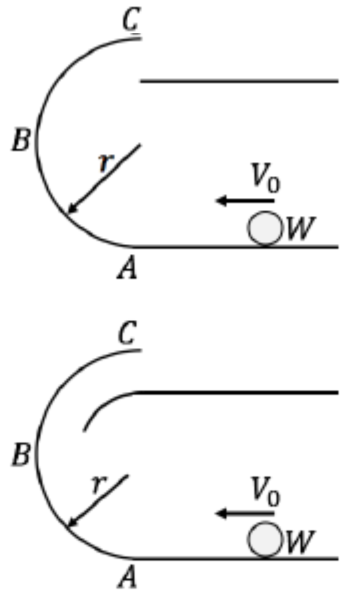


Figura (b)

Problema 23. Un cuerpo de peso W se lanza por un arco de retorno vertical en A con una rapidez V_0. El cuerpo se desplaza a lo largo de una circunferencia de radio r y queda en una superficie horizontal. Para cada uno de los dos arcos mostrados, determine:



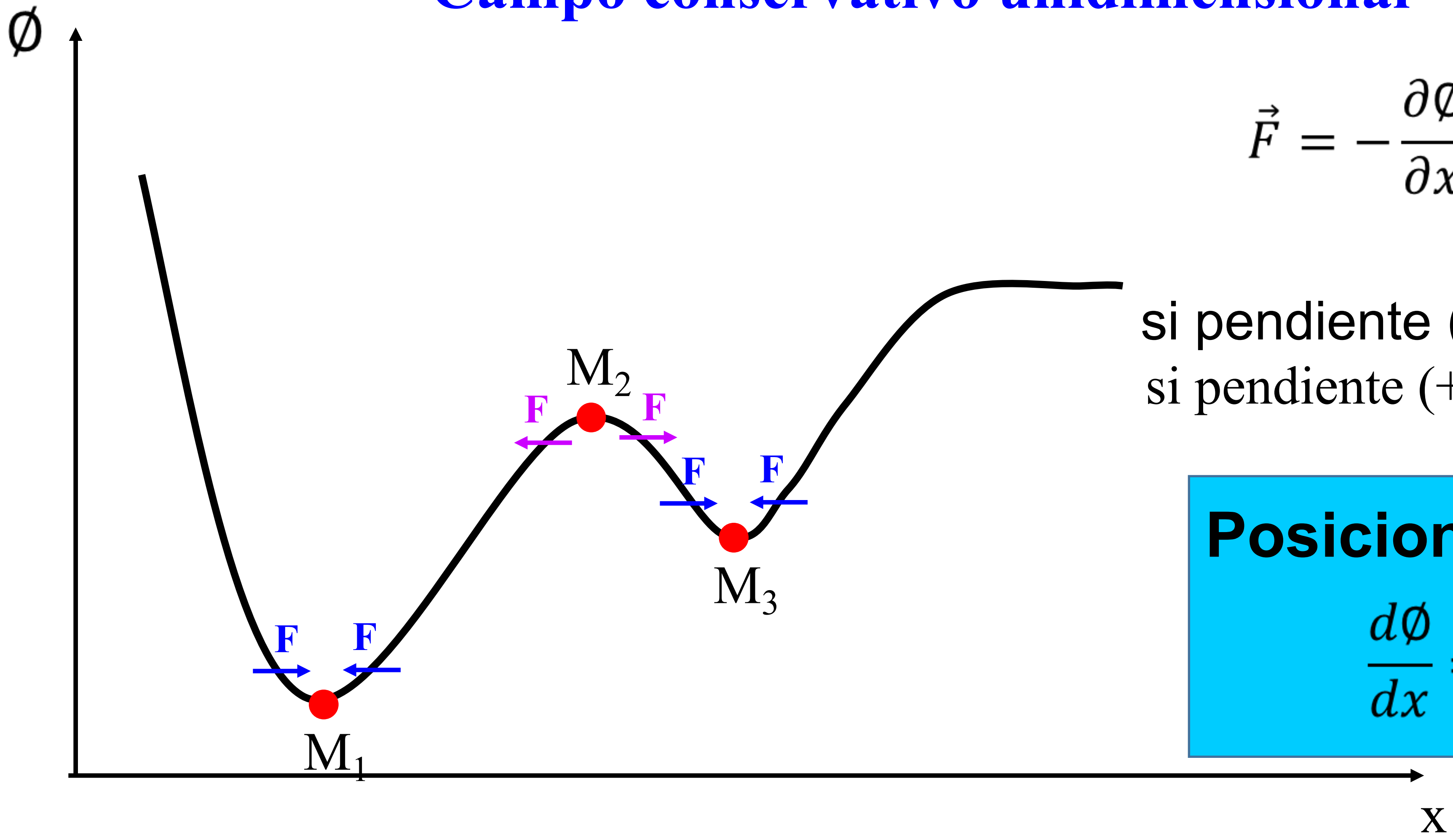
a) la mínima rapidez V_0 para que el cuerpo llegue a la superficie horizontal en C.

b) Si se desea colocar el cuerpo en la superficie horizontal C con una rapidez de $2\,m/s$ sabiendo que $r = 0.6$ metros, muestre que este requerimiento no se puede cumplir en el primer arco.

c) Para el mismo caso del inciso b) determine la rapidez inicial requerida V_0 el segundo arco.

Campo conservativo unidimensional

Repaso I



$$\vec{F} = -\frac{\partial Ø}{\partial x}\vec{\imath} = -\frac{dØ}{dx}\vec{\imath}$$

si pendiente (-), **F** en la dirección (+)

si pendiente (+), **F** en la dirección (-)

Posiciones de equilibrio

$$\frac{dØ}{dx} = 0 \rightarrow F = 0$$

M_1 M_3 Posiciones de **equilibrio ESTABLE**

M_2 Posición de **equilibrio INESTABLE**

Consideremos una partícula en un campo de fuerzas conservativo asociado a $\phi(x)$, con lo cual la energía mecánica permanece constante (caso unidimensional)

$T + \phi(x) = E$ es constante

$T = E - \phi(x) \geq 0$ ya que la energía cinética siempre es positiva

$E \geq \phi(x)$ **Zonas clásicamente permitidas**

la partícula solo podrá encontrarse en posiciones tales que cumplan con esa desigualdad

$E < \phi(x)$ **Zonas clásicamente prohibidas**

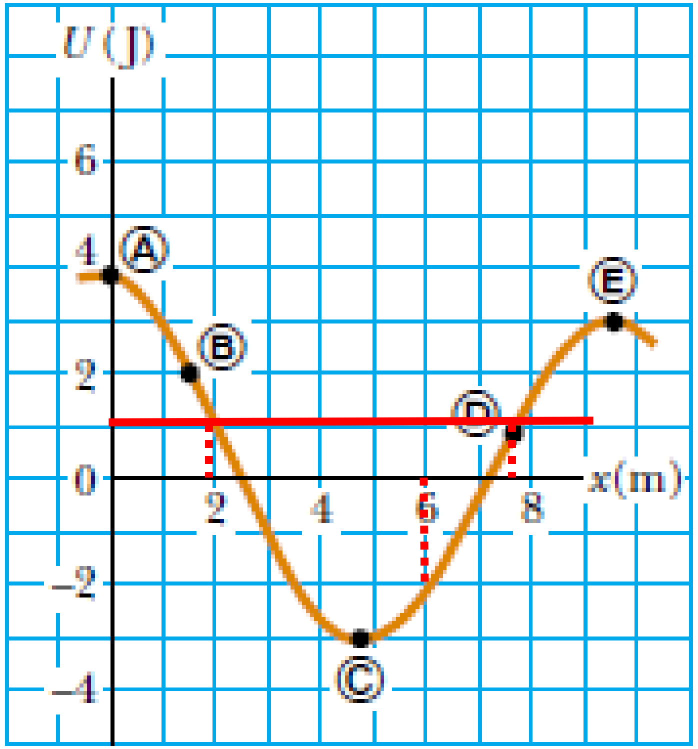
Problema 26 (guía de energía)

Para la curva de energía potencial que se muestra en la figura, determinar:

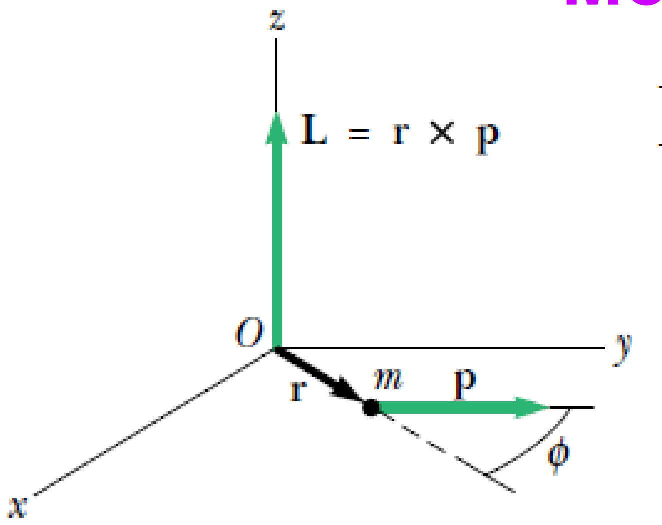
a) Si el valor de F_x es positivo, negativo o cero en los cinco puntos indicados.

b) Indicar los puntos de equilibrio estable e inestable

c) Si la partícula tuviera una energía mecánica de 1 J, ¿En qué zona podría moverse? ¿Cuál sería su energía cinética si estuviera ubicada en x = 6 m?



Momento angular respecto al origen de un SRI



$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ **L es perpendicular a r y a v**

Si movimiento plano (xy) → L perpendicular al plano de movimiento (en k)

magnitud de L $L = m\, r\, v_\theta$ $L = m\, r^2\, \dot{\theta}$

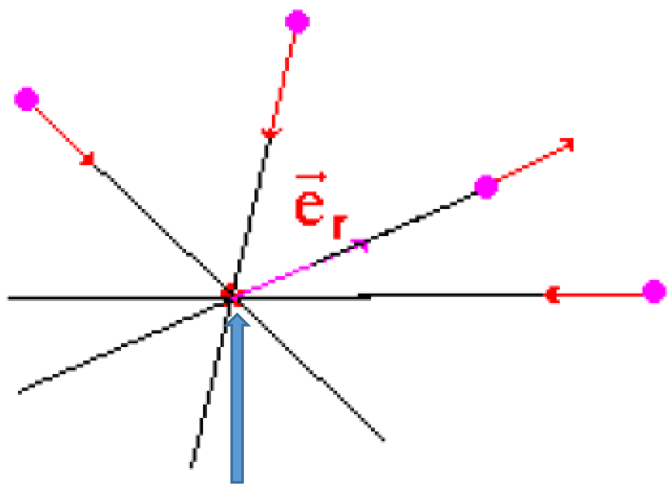
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ momento que genera la resultante de las fuerzas respecto del origen del SRI

Si el conjunto de fuerzas es tal que no generan momento respecto de un punto fijo a un sistema inercial, entonces el momento angular, calculado respecto de dicho punto, permanecerá constante

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = cte \quad \therefore \quad \vec{L} = \vec{L}_o \qquad m\, r^2\, \dot{\theta} = L_o$$

Fuerzas centrales



centro de fuerzas

$$\boxed{\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r}$$

Cuando la fuerza es central el momento angular con respecto al centro de fuerzas es constante y la partícula se desplazará a lo largo de una trayectoria plana.

$$\boxed{m\,r^2\,\dot{\theta} = L_\circ}$$

Conclusión: en los problemas de Fuerzas centrales conservativas de plantearse

- **la conservación de la energía y además**
- **la conservación del momento angular**