Cuerpo rígido

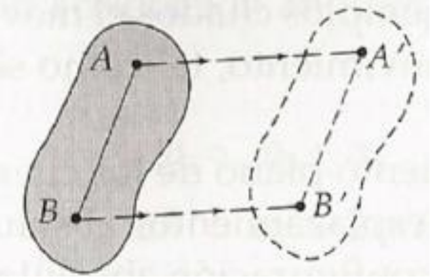
Cinemática plana

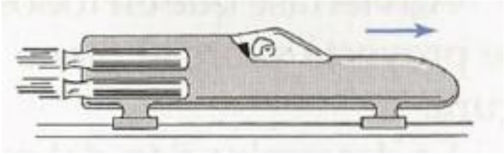
Un cuerpo rígido es un sistema formado por un conjunto discreto o continuo de cuerpos puntuales tales que la distancia entre los mismos permanece constante en el tiempo.

Tipos de movimiento plano

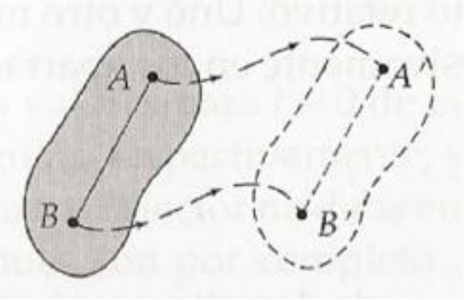
Traslación: **todo segmento rectilíneo del cuerpo permanece paralelo a su posición original**

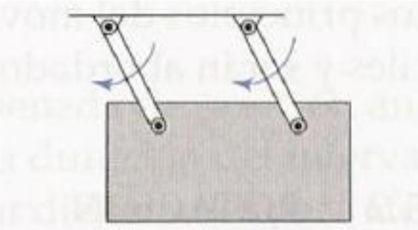
Rectilinea





Curvilínea

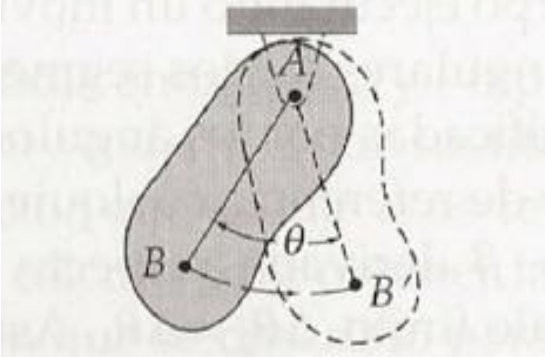




Cuando un cuerpo rígido realiza un movimiento de traslación todos los puntos tienen la misma velocidad y la misma aceleración.

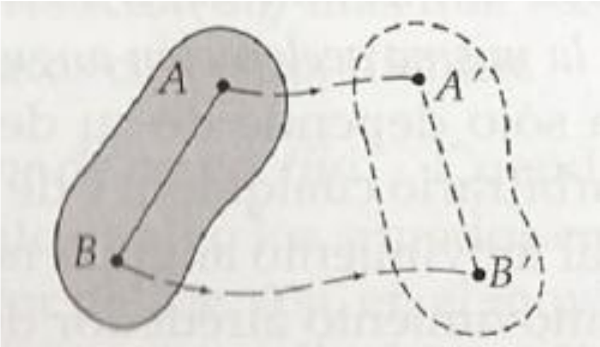
Tipos de movimiento plano

Rotación entorno a un eje fijo: movimiento angular entorno a dicho eje



- Todos los puntos seguirán trayectorias circulares alrededor del eje de rotación
- Todos los segmentos rectilíneos del cuerpo giran al mismo tiempo ángulos iguales

Movimiento plano general: combinación de traslación y rotación

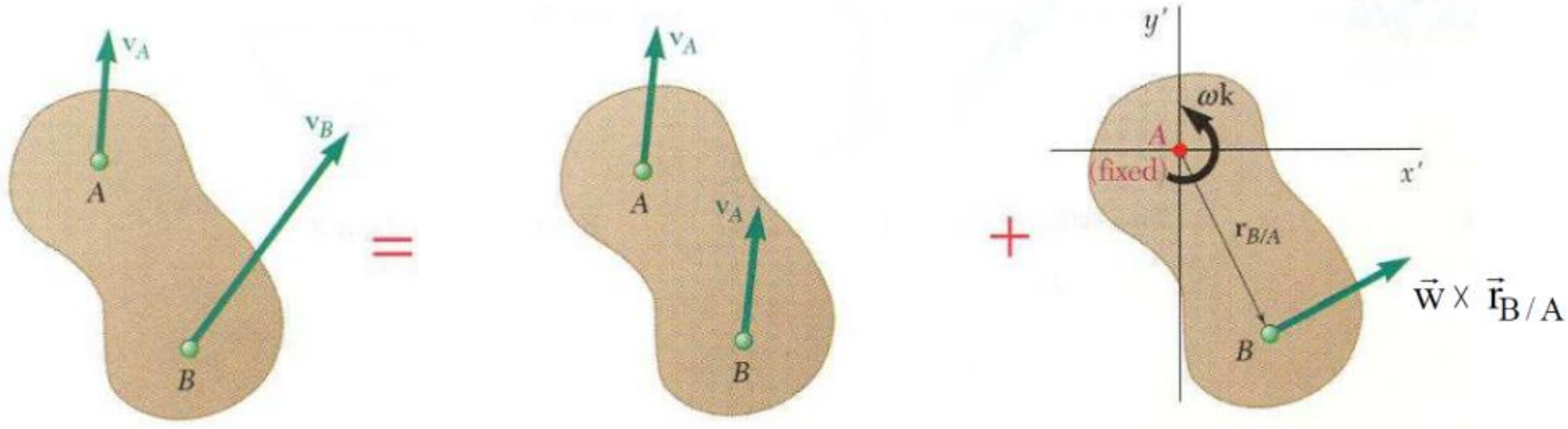


Cuerpo rígido: cinemática plana

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w} \times \vec{r}_{B/A}$$

2 ecuaciones escalares i) j)

$\vec{v}_B =$ $\vec{v}_A +$ $\vec{w} \times \vec{r}_{B/A}$



Plane motion = Translation with A + Rotation about A

Cuerpo rígido: cinemática plana

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w} \times \vec{r}_{B/A}$$

2 ecuaciones escalares

i)

j)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r}_{B/A} + \dot{\vec{w}} \times \vec{r}_{B/A}}_{\textit{Rotación entorno a un eje que pasa por A}}$$

2 ecuaciones escalares

i)

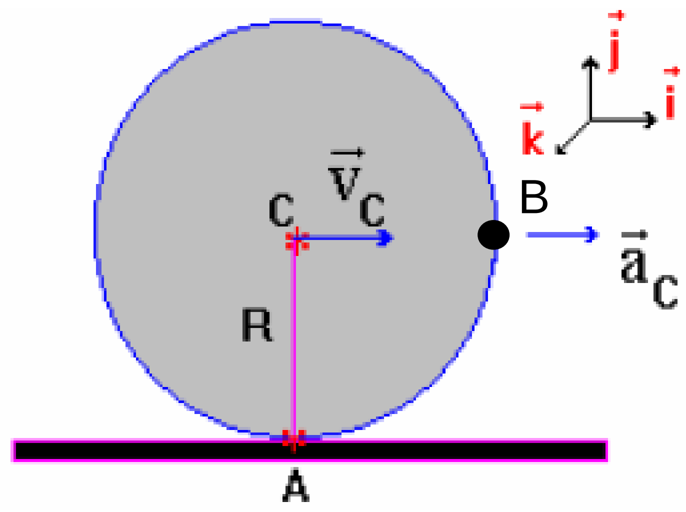
j)

Traslación con A

Rotación entorno a un eje que pasa por A

Ejemplo 1:

Considerar un cilindro cuyo centro de masa se desplaza hacia la derecha con una velocidad conocida y suponer que no existe deslizamiento sobre la superficie horizontal



a) **Hallar expresiones en función de la velocidad angular, para la velocidad de los puntos C y B**

b) **Si se conoce la aceleración angular de la rueda (mismo sentido que la velocidad angular), hallar la aceleración de los puntos C y A**

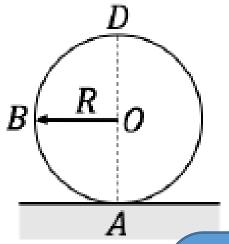
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r}_{B/A} + \dot{\vec{w}} \times \vec{r}_{B/A}$$

Guía de Cuerpo rígido

Prof. C. Pistonesi Guía 1 - Cuerpo Rígido 1C - 2019

Problema 1. Considere un rodillo de radio R que rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal:

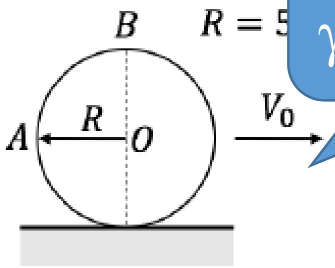


a) Graficar los vectores velocidad de los puntos A (punto de contacto con el piso), O (centro de la rueda), B y D. Expresar su magnitud en función de R y ω.

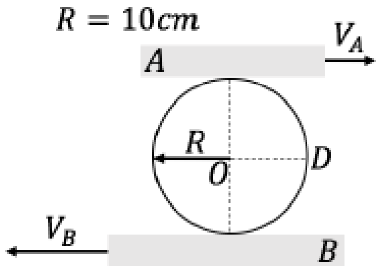
b) Determinar el centro instantáneo de rotación.

Ojo: ω horario y antihorario!

Problema 2. En el instante representado, el centro O de la rueda tiene una rapidez de $2\,m/s$ hacia la derecha, y disminuye a razón de $6\,m/s^2$. Determine las magnitudes de la aceleración de los puntos A y B en ese instante (la rueda gira sin deslizamiento).



Problema 3. El disco circular rueda sin deslizar entre las placas A y B, que se mueven paralelamente en sentidos opuestos. Si $V_A = 2\,m/s$ y $V_B = 4\,m/s$, localice el centro instantáneo de rotación del disco y determine la velocidad del punto D en el instante representado.

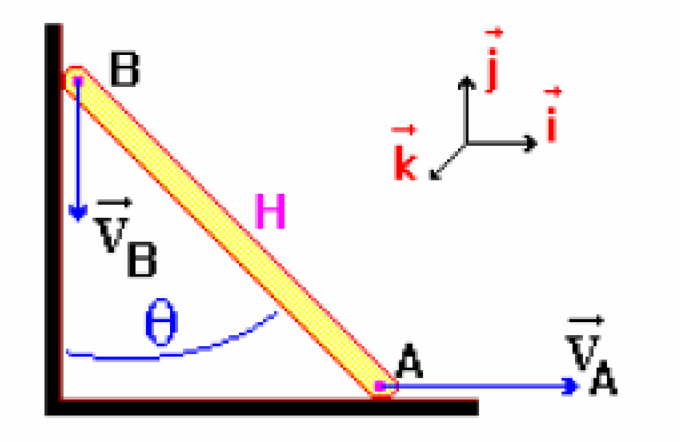


Condición de no deslizamiento en los puntos de contacto con las placas A y B

Ejemplo 2:

Consideremos una varilla rígida de 1 m que apoyada sobre una pared vertical y una superficie horizontal, se desliza de manera que en el instante de interés, el punto B desciende con una velocidad de 9 cm/s. Hallar la velocidad angular de la varilla y la velocidad del punto A.

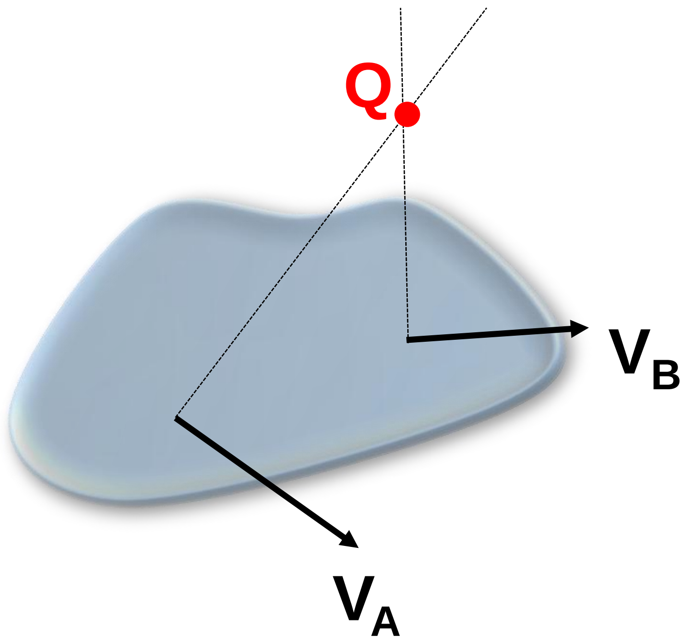
$\theta = 37°$

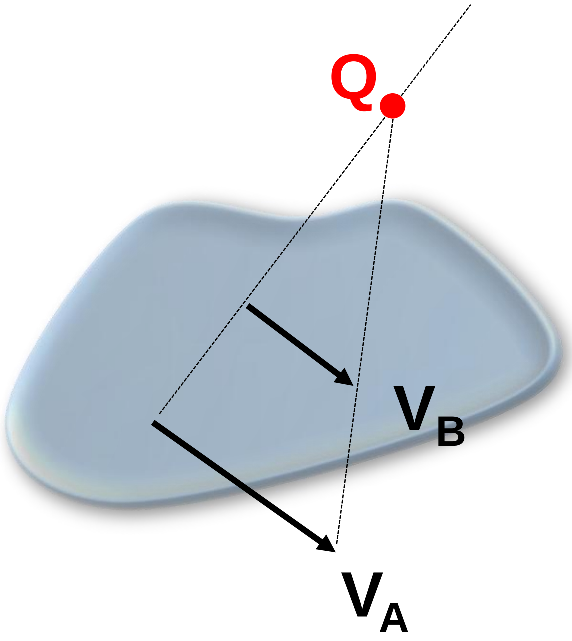


$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{w} \times \vec{r}_{B/A}$$

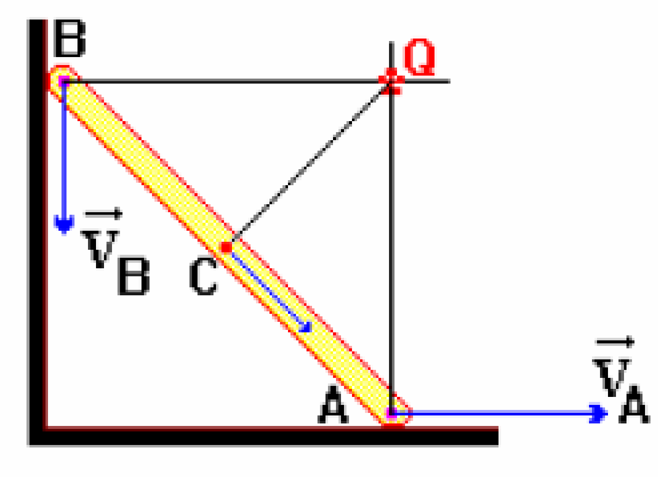
Similar al problema 6 de la guía

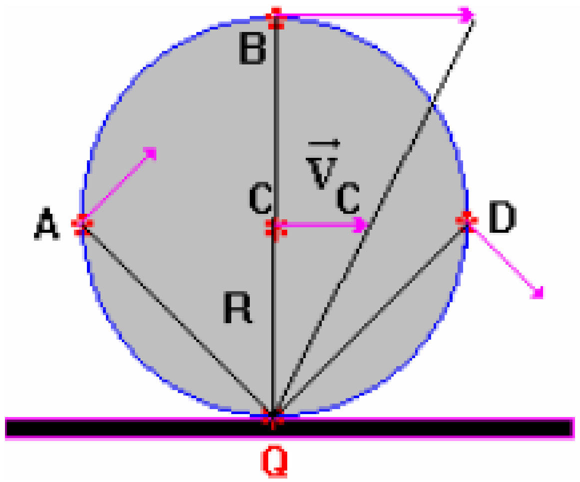
Centro instantáneo de rotación Q





Centro instantáneo de rotación Q





Cuidado!!!!

Instantáneamente $v_Q = 0$

Pero en general $a_Q \neq 0$

Ejemplo 3:

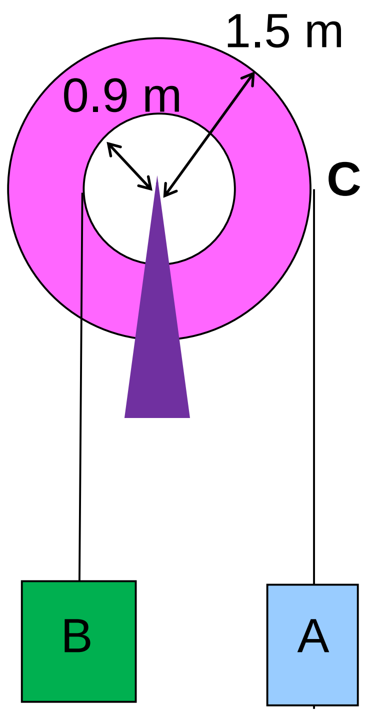
Una polea y dos cargas están unidas por cuerdas inextensibles y que no deslizan como se indica. La carga A tiene una aceleración constante de 3 m/s^2 y una velocidad inicial de 4.6 m/s ambas dirigidas hacia arriba. Determinar

a. La velocidad angular inicial de la polea.

b. La aceleración angular de la polea.

c. La aceleración del punto C en el instante inicial.

d. La velocidad de la carga B después de 3 s (sabiendo que la aceleración angular es constante).



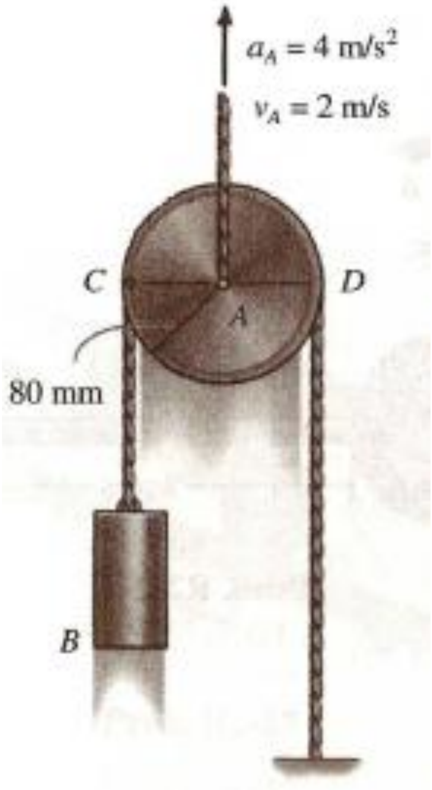
a. $\omega = 3{,}1\ s^{-1}\ \mathbf{k}$.
b. $\gamma = 2{,}0\ s^{-2}\ \mathbf{k}$.
c. $\mathbf{a_c} = -1{,}44\ \mathbf{i} + 3\ \mathbf{j}\quad m/s^2$
d. $\mathbf{v_B} = -8{,}1\ \mathbf{j}$ m/s

Ejemplo 4:

El centro de la polea es izado verticalmente con una aceleración de 4 m/s^2 en el instante en que tiene una velocidad de 2 m/s. Si el cable no se desliza sobre la superficie de la polea, determine:

a.La aceleración del punto C de la polea.

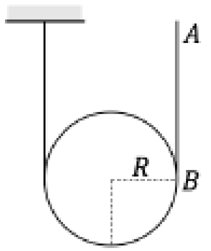
b.La aceleración del cilindro B



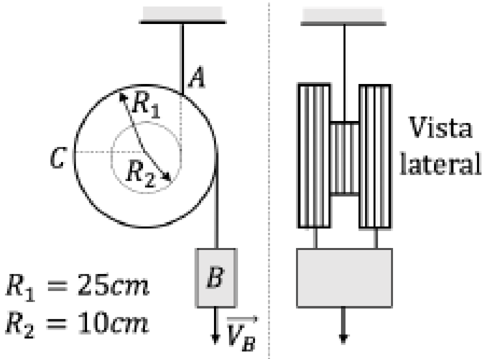
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r}_{B/A} + \dot{\vec{w}} \times \vec{r}_{B/A}$$

Problema 4. El movimiento de un cilindro de radio $R = 7.6\,cm$ se controla mediante la cuerda que se muestra y que no desliza con respecto al cilindro. Si se sabe que el extremo A de la cuerda tiene una velocidad de $30.5\,cm/s$ y una aceleración de $48.8\,cm/s^2$, ambas dirigidas hacia arriba determine la velocidad angular y la aceleración angular del cilindro. Graficar cualitativamente sobre el cilindro el vector aceleración del centro geométrico y del punto B del mismo.



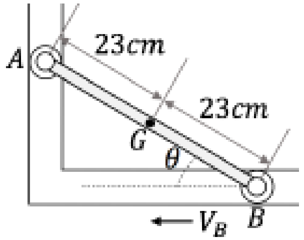
Problema 5. El carrete rueda sobre su garganta ascendiendo por el cable interior A, cuando la placa igualadora B estira hacia abajo de los cables exteriores. Los tres cables están arrollados firmemente alrededor de sus respectivas periferias y no deslizan. Si en el instante representado, B desciende una distancia de $40\,cm$. partiendo del reposo con una aceleración constante de $5\,cm/s^2$, determine la velocidad de C y la aceleración del centro O para ese instante particular.



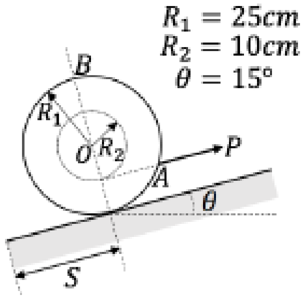
Problema 6. El extremo B de la barra de $46\,cm$ tiene una velocidad constante $V_B = 2\,m/s$ hacia la izquierda.

a) Calcule la aceleración del centro de masa G de la barra si $\theta = 45°$.

b) Si ahora el extremo B tiene velocidad nula y aceleración $a_B = 1.2\,m/s^2$ hacia la derecha cuando $\theta = 45°$, calcule la aceleración correspondiente al CM.



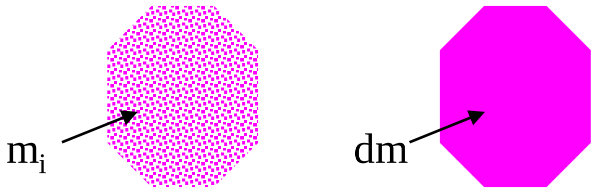
Problema 7. El centro O del carrete parte del reposo y adquiere una velocidad de $1.2\,m/s$ hacia arriba sobre el plano inclinado, con aceleración constante, en una distancia $S = 2.5\,m$ bajo la acción de una fuerza constante de módulo P, aplicada al punto A del cable. El cable está enrollado firmemente alrededor de la garganta y la rueda gira sin deslizar. Calcule la aceleración del punto A del cable, y del punto B del carrete para la posición indicada.



Dinámica de Cuerpo Rígido

Sistema discreto de cuerpos puntuales que satisfacen la condición de rigidez

discreto **continuo**



$$m_i \rightarrow dm = \rho(\vec{r})d\tau$$

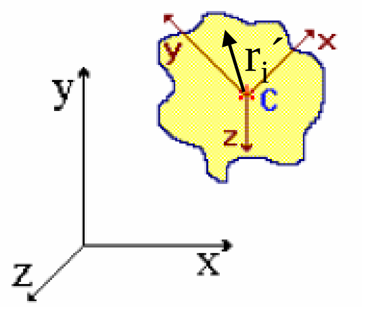
$$\sum m_i \rightarrow \int_\tau \rho(\vec{r})d\tau$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \qquad \vec{r}_c = \frac{\int_\tau \vec{r}\rho(\vec{r})d\tau}{\int_\tau \rho(\vec{r})d\tau}$$

Momento angular respecto al centro de masa

$$\vec{L}_c = \sum \vec{r}_i\,' \times m_i \vec{v}_i$$

posición del punto i respecto del centro de masa (c.m.)



$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{w} \times \vec{r}_i\,'$$

$$\vec{L}_c = \sum \vec{r}_i\,' \times m_i (\vec{v}_c + \vec{w} \times \vec{r}_i\,') \qquad \sum m_i \vec{r}_i\,' = 0$$

$$\vec{L}_c = \sum m_i \vec{r}_i\,' \times (\vec{w} \times \vec{r}_i\,')$$

a x (**b** x **c**) = (**a . c**) **b - (a . b) c**

$$\vec{L}_c = \sum m_i \left[\vec{w}\, r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{w} \cdot \vec{r}_i)\right]$$

Sacamos el superínidice ´ , seguimos midiendo posiciones respecto del c.m.

Uso un sistema de ejes ortogonales solidario al cuerpo con origen en c. m.

Movimiento plano (xy) $\boxed{\vec{w} = w\,\vec{k}}$

$$\vec{L}_c = \sum m_i \left[\vec{w}\, r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{w} \cdot \vec{r}_i)\right]$$

k **i, j, k**

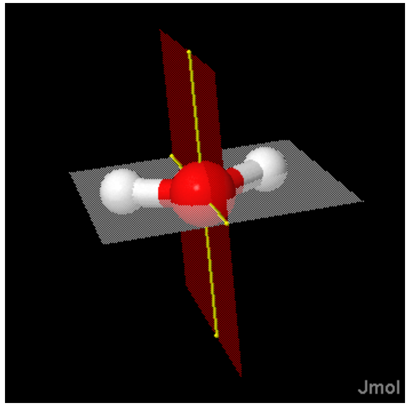
$$\vec{L}_c = \sum m_i \left[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) w\, \vec{k} - (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}) w z_i\right]$$

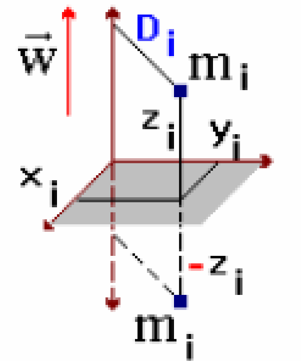
$$\vec{L}_c = \sum m_i\left[(x_i^2+y_i^2+z_i^2)w\,\vec{k} - (x_i\vec{i}+y_i\vec{j}+z_i\vec{k})wz_i\right]$$

$$\vec{L}_c = \left[-\sum m_i x_i z_i\right]w\vec{i} + \left[-\sum m_i y_i z_i\right]w\vec{j} + \left[\sum m_i(x_i^2+y_i^2)\right]w\vec{k}$$

Las cantidades en los corchetes no dependen del estado de movimiento del cuerpo, solo de la distribución espacial de la masa del cuerpo

Plano de movimiento → plano de simetría (la materia está igualmente distribuida a ambos lados)





$$\sum m_i x_i z_i = 0$$

$$\sum m_i y_i z_i = 0$$

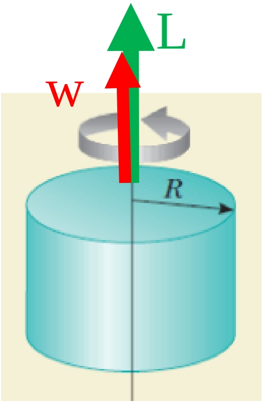
$$\vec{L}_c = \left[\sum m_i(x_i^2+y_i^2)\right]w\,\vec{k} \longrightarrow \vec{L}_c \;//\; \vec{w}$$

$$\vec{L}_c = \left[\sum m_i (x_i^2 + y_i^2)\right] w\, \vec{k}$$

Momento de inercia del cuerpo respecto de un eje paralelo al eje de rotación y que pasa por el centro de masa del cuerpo

$$\boxed{I_c = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)}$$

- **tiene en cuenta la distribución de materia en torno a un eje paralelo al de rotación que pasa por el centro de masa**
- **propiedad constante de cuerpo**
- **medida de su inercia a la rotación**



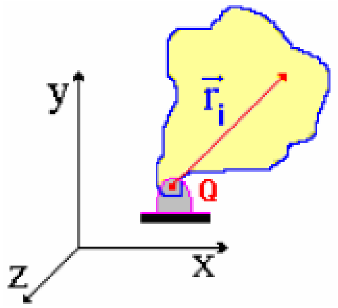
$$\boxed{\vec{L}_c = I_c \vec{w}}$$

movimiento plano y en plano de simetría

para un sistema contínuo $I_c = \int_\tau (x^2 + y^2)\, \rho(xyz)\, d\tau$

Momento angular respecto a un punto fijo

$$\vec{L}_Q = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \qquad \vec{v}_i = \vec{w} \times \vec{r}_i$$



$$\vec{L}_Q = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{w} \times \vec{r}_i)$$

$$\vec{L}_Q = \sum m_i \left[\vec{w}\, r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{w} \cdot \vec{r}_i)\right]$$

$$\boxed{\vec{L}_Q = I_Q \vec{w}}$$

$$I_Q = \int_\tau (x^2 + y^2)\, \rho(xyz)\, d\tau$$

Momento de inercia del cuerpo respecto de un eje paralelo al eje de rotación y que pasa por el punto fijo

Momento angular respecto a un punto A cualquiera

De sistema de partículas

$$\boxed{\vec{L}_A = \vec{r}_{c/A} \times m\vec{v}_c + \vec{L}_c}$$

Ecuaciones de movimiento

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_c}$$

Resultante de fuerzas externas

Aceleración del centro de masa

Esta ecuación es insuficiente: el efecto que produce una fuerza depende además del punto de aplicación

Necesitamos
ECUACIONES DE MOMENTO

Centro de masa $\vec{M}_c = \left.\frac{d\vec{L}_c}{dt}\right|_{XYZ} \longrightarrow \vec{L}_c = I_c\vec{w}$

$$\boxed{\vec{M}_c = I_c\vec{\alpha}}$$

La suma de los momentos respecto del centro de masa de todas las fuerzas externas, es igual al producto del momento de inercia entorno a un eje que pase por el c.m. y la aceleración angular del mismo

Punto fijo $\vec{M}_Q = \left.\frac{d\vec{L}_Q}{dt}\right|_{XYZ} \longrightarrow \vec{L}_Q = I_Q\vec{w}$

$$\boxed{\vec{M}_Q = I_Q\vec{\alpha}}$$

Momento respecto a un punto cualquiera

$$\vec{M}_A = \left.\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right|_{XYZ} + \vec{v}_A \times m\vec{v}_c$$

$$\vec{L}_A = \vec{r}_{c/A} \times m\vec{v}_c + \vec{L}_c$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}_{C/A}}{dt}}_{\vec{v}_{C/A} = \vec{v}_C - \vec{v}_A} \times m\vec{v}_C + \vec{r}_{C/A} \times m\vec{a}_C + \underbrace{\frac{d\vec{L}_C}{dt}}_{\vec{M}_C} \longrightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \cancel{\vec{v}_C \times m\vec{v}_C} - \vec{v}_A \times m\vec{v}_C + \vec{r}_{C/A} \times m\vec{a}_C + \vec{M}_C$$

$$\vec{M}_A = \cancel{-\vec{v}_A \times m\vec{v}_C} + \vec{r}_{C/A} \times m\vec{a}_C + \vec{M}_C + \cancel{\vec{v}_A \times m\vec{v}_C}$$

$$\boxed{\vec{M}_A = \vec{r}_{c/A} \times m\vec{a}_c + I_c\vec{\alpha}}$$

En resumen…

Ecuaciones de movimiento

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_c}$$ → **Aceleración del centro de masa**

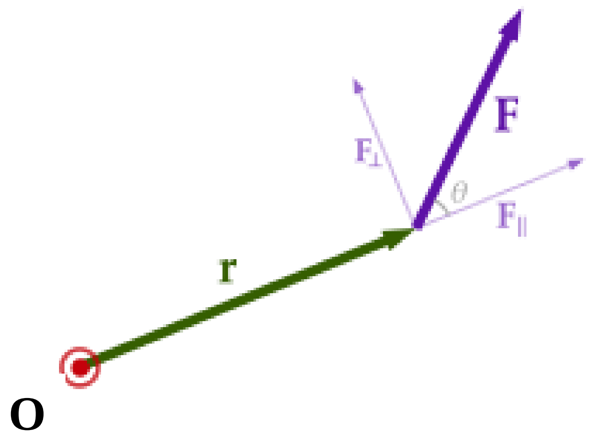
$$\boxed{\vec{M}_c = I_c\vec{\alpha}}$$ **Momento respecto al centro de masa**

$$\boxed{\vec{M}_Q = I_Q\vec{\alpha}}$$ **Momento respecto a un punto fijo**

$$\boxed{\vec{M}_A = \vec{r}_{c/A} \times m\vec{a}_c + I_c\vec{\alpha}}$$ **Momento respecto a un punto A cualquiera**

Momento o torque (respecto de O)

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



vector perpendicular al plano formado por r y F

$$\mathbf{M} = r\,\underbrace{F sen\theta}_{}\,\mathbf{k}$$

$F_{\perp} \rightarrow$ **componente de F perpendicular a r**

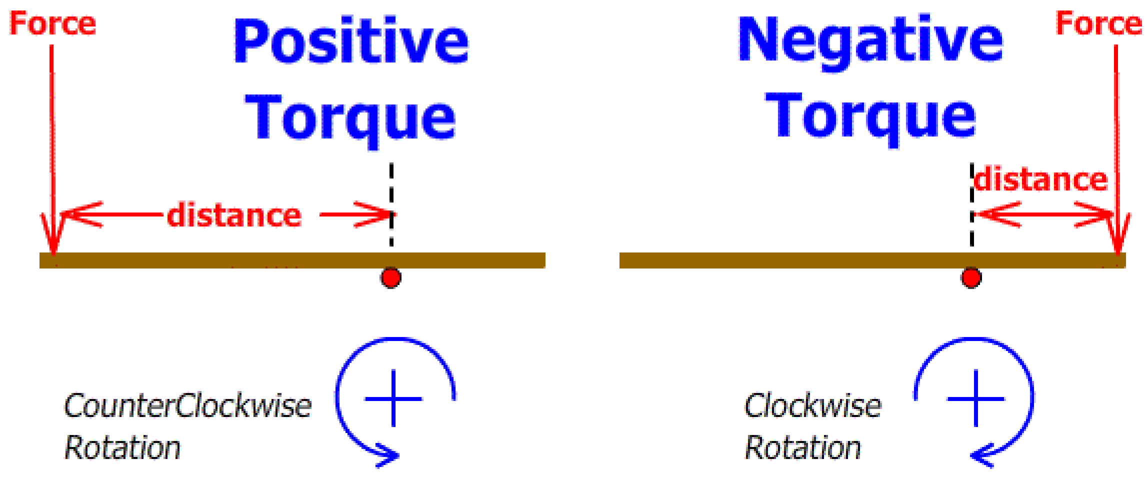


Diagrama de cuerpo aislado → Fuerzas → Punto de aplicación

Condiciones de equilibrio para un cuerpo rígido

$\vec{a}_c = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F} = 0}$ i) j) **2 ecuaciones escalares**

$\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{M} = 0}$ **Momento respecto a <u>cualquier</u> punto**

1 ecuacion escalar en k