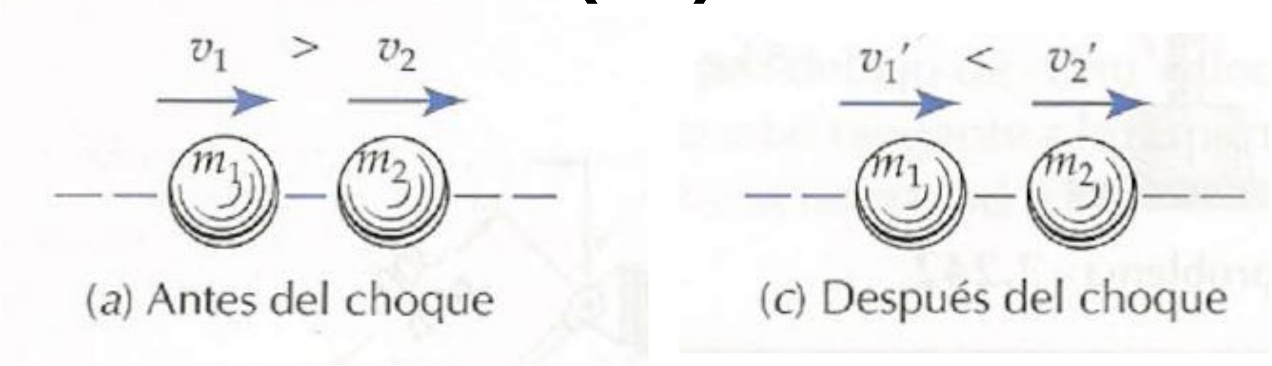
Choque $\rightarrow$ se conserva la cantidad de movimiento

Repaso

Choque central frontal (1D)

$F_{ext} = 0 \rightarrow P_{tot} = cte$



$$\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2}$$

$$\boxed{e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}}$$

1 elástico **Se conserva la energía cinética**

0 plástico o perfectamente inelásitco

<1 inelástico

Hay perdida de energía

Sistemas de Partículas

Repaso

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}}$$

$$\boxed{\vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}}$$

$$\boxed{\vec{a}_c = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{m}}$$

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{a}_c}$$

Ecuación de Movimiento para el Centro de Masa de un Sistema de partículas

Resultante de las fuerzas <u>externas</u>

aceleración del c.m.

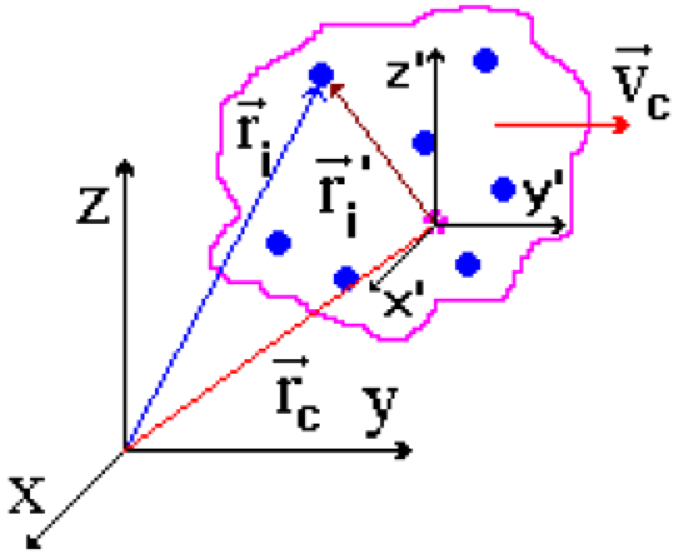
El **centro de masa se mueve como una partícula cuya masa es la totalidad de la masa del sistema sometida a la influencia de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema**

Repaso

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i \qquad \boxed{\vec{P} = m\vec{v}_c}$$

Resultante de las fuerzas <u>externas</u>

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$



SRCentroidal

Origen en el centro de masa

Se traslada con la velocidad del c. m.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i{}' \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i{}' \qquad \vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{a}_i{}'$$

<u>Problema 2</u> (guía sistemas de partículas)

Defina la velocidad del centro de masa. ¿Bajo qué condiciones permanece constante dicha magnitud?

Repaso

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2}$$

Energía cinética de un sistema de partículas

$$\boxed{T_{or} = \frac{1}{2} m v_c^2}$$

Término orbital: tiene en cuenta el movimiento del c. m. respecto al SRF

$$\boxed{T' = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2}$$

Término intrínseco: tiene en cuenta el movimiento de cada partícula respecto al SRC

Repaso

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \Delta T_{or}$$

$$\sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i' = \Delta T'$$

si bien **las fuerzas internas** no pueden modificar el estado de movimiento del centro de masa de un sistema , sí pueden producir cambios en la energía cinética del sistema (específicamente en el término intrínsico).

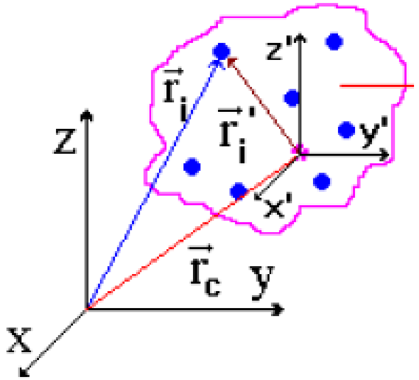
<u>Problema 12</u> (guía sistemas de partículas)
Las fuerzas internas, ¿pueden modificar el movimiento del centro de masa de un sistema de partículas? ¿Y a la energía cinética del sistema?

<u>Problema 16</u> (sistemas de partículas)
Dado el teorema de las fuerzas vivas para un sistema de partículas:

$$\int \sum_i \vec{F}_i . d\vec{r}_C + \sum_i \int \left(\vec{F}_i + \vec{f}_i\right) d\vec{r}_{i/C} = \Delta\left(\frac{1}{2} m v_C^2\right) + \Delta\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i/C}^2\right)$$

Separar la ecuación en dos ecuaciones dando el significado de cada término.

Momento angular del sistema de partículas respecto al origen del SRF



$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c + \sum \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_i'}$$

$$\boxed{\vec{L}_{or} = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c}$$ componente orbital

$$\boxed{\vec{L}_c' = \sum \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_i'}$$ componente intrínseca

velocidades medidas en SRC

velocidades medidas en SRF

$$\boxed{\vec{L}_c' = \vec{L}_c}$$

Momento angular respecto de A

$$\boxed{\vec{L}_A = \vec{r}_{c/A} \times m\vec{v}_c + \sum \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_i'}$$

Cuerpo rígido: cinemática plana

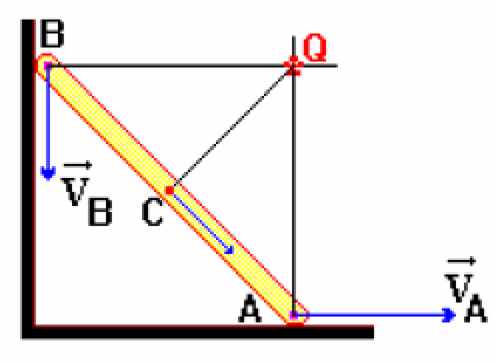
Repaso

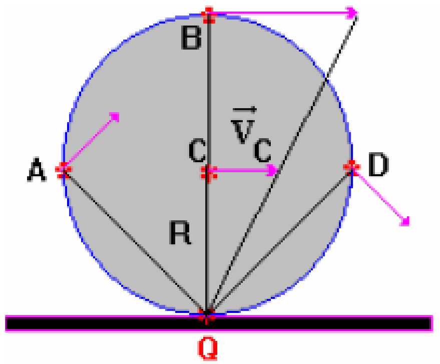
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w} \times \vec{r}_{B/A}$$ **2 ecuaciones escalares** i) j)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r}_{B/A} + \dot{\vec{w}} \times \vec{r}_{B/A}$$ **2 ecuaciones escalares** i) j)

Centro instantáneo de rotación Q

v_Q= 0 en cierto instante
No es un punto fijo, en general $a_Q \neq 0$





Condiciones de equilibrio para un cuerpo rígido

Repaso

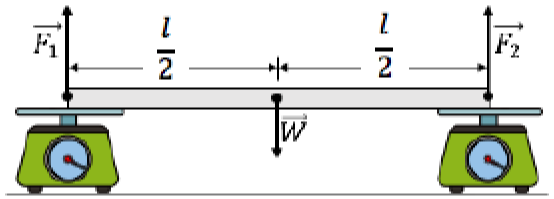
$\vec{a}_c = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F} = 0}$ i) j)   **2 ecuaciones escalares**

$\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{M} = 0}$ **Momento respecto a <u>cualquier</u> punto**

1 ecuacion escalar en k

Repaso

Problema 8. Una barra uniforme de acero, de un metro de longitud, descansa sobre dos balanzas ubicadas en sus extremos como indica la figura. La barra pesa $4\,N$.



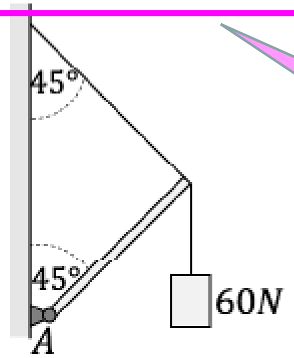
a) Indique la lectura de cada balanza.

b) Suponga que se pone un bloque de $6\,N$ a $25\,cm$ de un extremo de la barra. ¿Qué lectura darán las balanzas ahora?

Problema 9. ¿Es correcto afirmar que siempre que la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo rígido sea cero, el cuerpo estará en equilibrio?

No!

Problema 10. Una barra uniforme está articulada en la pared. Un cable fijo a la pared está unido al otro extremo. Si el peso de la barra es de $20\,N$, calcule:

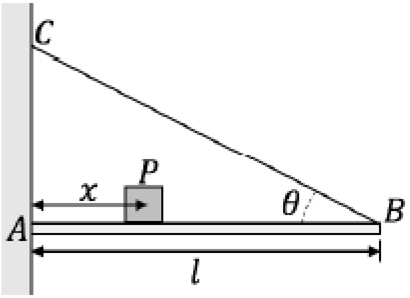


a) La fuerza ejercida sobre la articulación A.

b) El ángulo que forma dicha fuerza con la barra.

c) La tensión del cable.

Problema 11. Una barra delgada horizontal AB de peso despreciable y longitud l está articulada sobre una pared vertical en A y sostenida en B por un alambre delgado BC, que forma un ángulo θ con la horizontal. Un peso P se puede llevar a cualquier lugar de la barra y se coloca a una distancia x de la pared.



a) Encuentre la tensión en el alambre delgado en función de x.

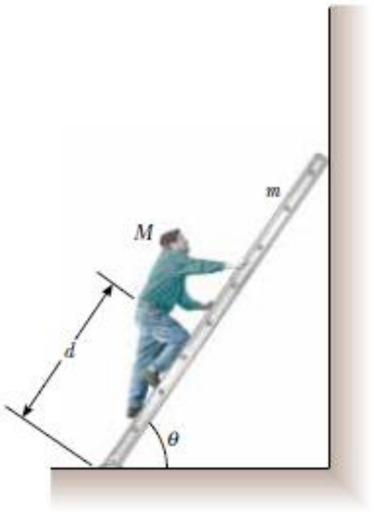
b) Encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida en la barra por el perno A.

Ejemplo 1 (problema 13 guía de cuerpo rígido)

Una escalera de 18.29 m de largo y que pesa 445 N descansa contra un muro en un punto que está a 14.63 m sobre el suelo. El centro de masa de la escalera está a la tercera parte de su longitud, a partir de su base. Un hombre de 712 N sube hasta la mitad de la escalera. Suponiendo que la pared no tiene fricción,

a) Hallar las fuerzas ejercidas sobre la escalera por el piso y la pared.

b) Si el coeficiente de fricción estática entre el suelo y la escalera es 0.40, ¿Hasta qué distancia d puede subir el hombre antes de que la escalera comience a resbalar?



Condiciones de equilibrio

$$\vec{a}_c = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F} = 0} \Rightarrow \begin{cases} \text{i) } \Sigma F_x = 0 \\ \text{j) } \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{M} = 0}$$

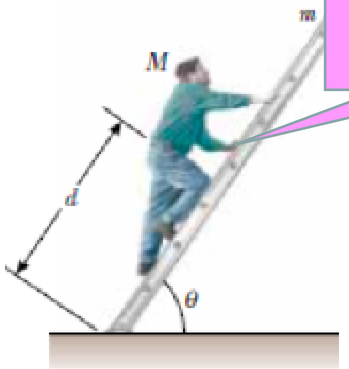
Problema 12. ¿Es posible subir por una escalera que esté apoyada en una pared, si el suelo no ejerce rozamiento y, en cambio, la pared si?

No!

Problema 13. Una escalera de 18.29 m de largo y que pesa 445 N descansa contra un muro en un punto que está a 14.63 m sobre el suelo. El centro de masa de la escalera está a la tercera parte de su longitud, a partir de su base. Un hombre de 712 N sube hasta la mitad de la escalera. Suponiendo que la pared no tiene fricción:

a) Halle las fuerzas ejercidas sobre la escalera por el piso y la pared.

b) Si el coeficiente de fricción estática entre el suelo y la escalera es 0.4, ¿hasta qué distancia d puede subir el hombre antes de que la escalera comience a resbalar?



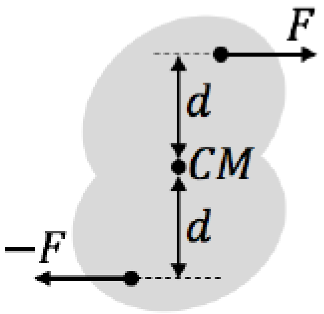
Problema 14. Considere un objeto sometido a dos fuerzas como indica la figura. Elija la afirmación correcta y justifique.

a) El objeto se encuentra en equilibrio de fuerzas pero no en equilibrio de momento.

b) El objeto se encuentra en equilibrio de momento pero no en equilibrio de fuerzas.

c) El objeto se encuentra en equilibrio de fuerzas y de momento.

d) El objeto no está ni en equilibrio de fuerzas ni en equilibrio de momento.



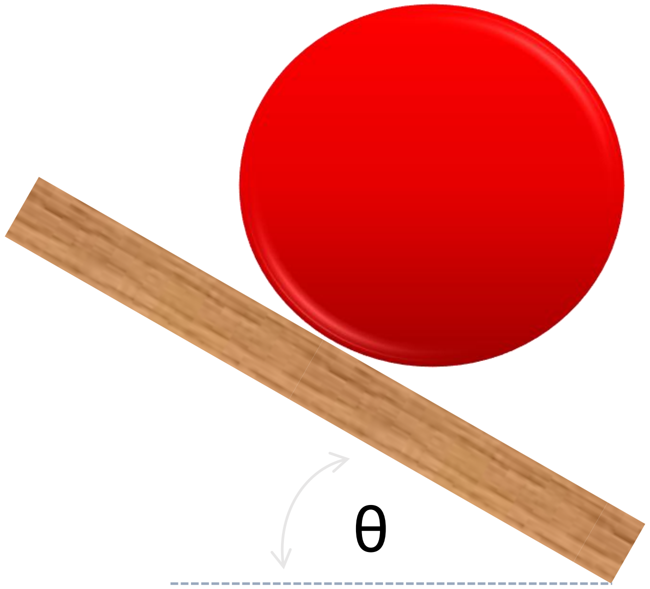
a)

Entonces el cuerpo NO ESTÁ en equilibrio!!!!!

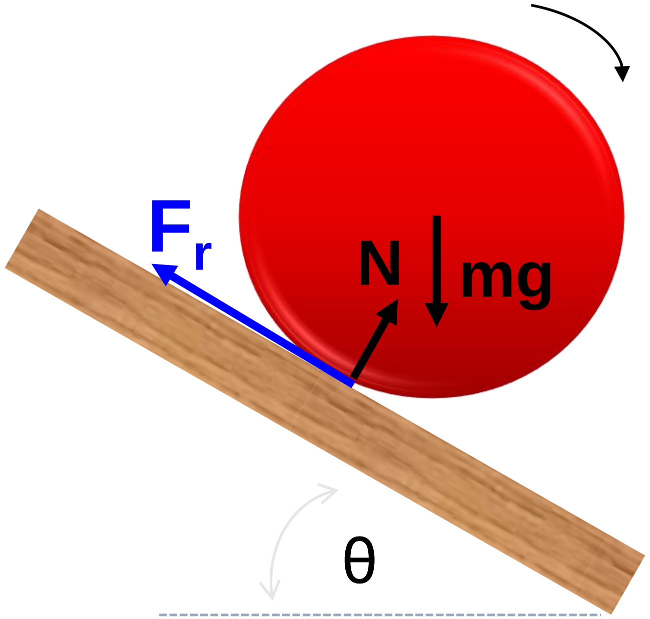
Sistemas en roto-traslación

Ejemplo 2

Una esfera maciza de masa M y radio R, baja rodando sin deslizar por un plano inclinado de ángulo θ. Calcular la aceleración angular y la aceleración del centro de masa.



Sistemas en roto-traslación



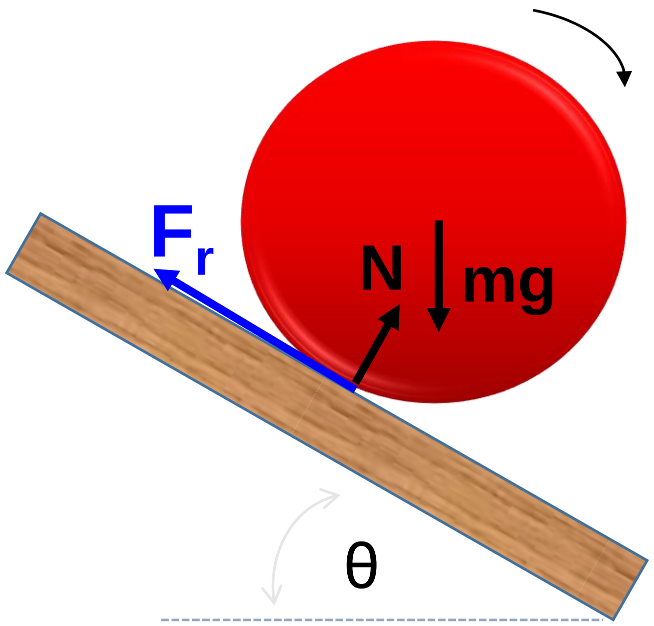
a medida que baja <u>ROTA</u>

debe haber alguna fuerza que genere MOMENTO

F_r es la única fuerza que puede producir MOMENTO respecto al centro de masa

Si rueda sin deslizar → F_r es estática

Sistemas en roto-traslación



$I_{CM} = (2/5)\, mR^2$

Ecuación de movimiento

i) $\Sigma F_x = m\, a_{xc}$

j) $\Sigma F_y = m\, a_{yc}$

k) $M_C = I_C \alpha$ **respecto al c.m.**

ó

k) $M_Q = I_Q \alpha$ **punto fijo**

Sistemas en roto-traslación

Ejemplo 3

Problema 19. Un rodillo de $0.8\,m$ de radio está unido a un disco de $1.6\,m$ de radio. El conjunto tiene una masa de $5\,kg$ y un radio de giro de $1.2\,m$. Una cuerda se une, como se indica en la figura y se tira con una fuerza P de magnitud $20\,N$. Si el disco rueda sin deslizar, calcule:

a) La aceleración angular del disco y la aceleración de su centro, G.

b) El mínimo valor del coeficiente de rozamiento que sea compatible con este movimiento.

c) Si ahora $P = 25\,N$ y $\mu = 0.2$, determine:

   i. si el disco se desliza o no;

   ii. la aceleración angular del disco y la aceleración de G (considere $\mu_d = 0.2$).

Ecuación de movimiento

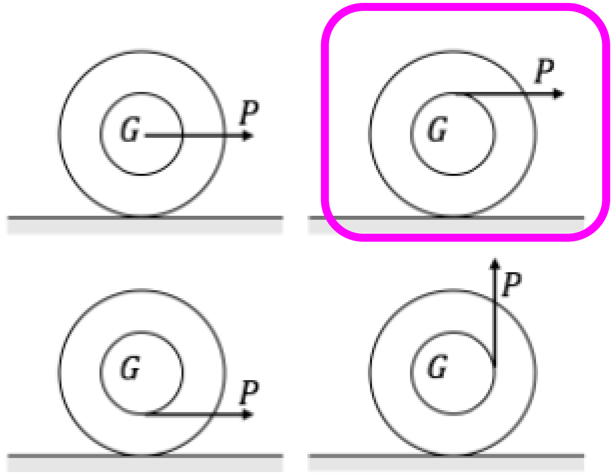
i) $\Sigma F_x = m\, a_{xc}$

j) $\Sigma F_y = m\, a_{yc}$

k) $M_C = I_C \alpha$ respecto al c.m.

ó

k) $M_Q = I_Q \alpha$ punto fijo



Energía cinética

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{w} \times \vec{r}_{i/c}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{w} \times \vec{r}_{i/c})^2 + \vec{v}_c \cdot \vec{w} \times \cancel{\sum m_i \vec{r}_{i/c}}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i (\vec{w} \times \vec{r}_{i/c}) \cdot (\vec{w} \times \vec{r}_{i/c})}$$

(**P** X **Q**) . **R** = **P** . (**Q** X **R**)

$$\underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i \vec{w} \cdot \underbrace{[\vec{r}_i \times (\vec{w} \times \vec{r}_i)]}_{\vec{L}_c}}_{\frac{1}{2} \vec{w} \cdot \vec{L}_c}$$

Simplifico la notación, r_i es la posición con respecto al cm

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \vec{w} \cdot \vec{L}_c$$

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \vec{w} \cdot \vec{L}_c$$

Para movimiento plano y en plano de simetría $\rightarrow \quad \vec{L}_c = I_c \vec{w}$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c w^2}$$

$$\boxed{T_{or} = \frac{1}{2} m v_c^2}$$

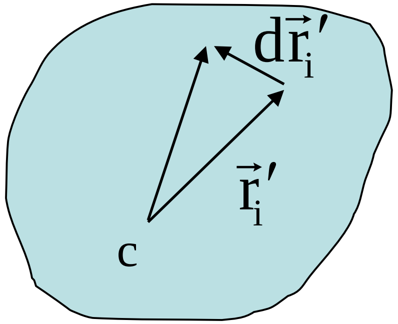
Término orbital de la energía cinética

$$\boxed{T' = \frac{1}{2} I_c w^2}$$

Término intrínseco o de spin

Trabajo mecánico

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + \sum \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$



$$d\vec{r}_i' = \vec{v}_i' \, dt \qquad d\vec{r}_i' = (\vec{w} \times \vec{r}_i') \, dt$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + \sum \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot (\vec{w} \times \vec{r}_i') \, dt$$

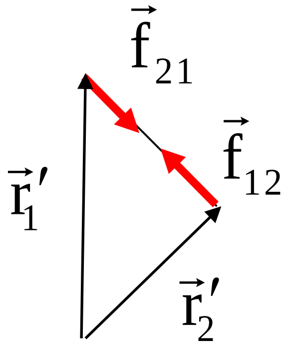
$$\sum \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot (\vec{w} \times \vec{r}_i') \, dt = \sum \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot (d\vec{\theta} \times \vec{r}_i')$$

$$\sum \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot (\vec{w} \times \vec{r}_i') \, dt = \sum \int \vec{r}_i' \times (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{\theta}$$

$$\sum \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot (\vec{w} \times \vec{r}_i') \, dt = \int \left[\sum \vec{r}_i' \times (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \right] \cdot d\vec{\theta}$$

$$\int \left[\sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i \right] \cdot d\vec{\theta} + \int \left[\sum \vec{r}_i' \times \vec{f}_i \right] \cdot d\vec{\theta}$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + \int \left[\sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i \right] \cdot d\vec{\theta} + \int \left[\sum \vec{r}_i' \times \vec{f}_i \right] \cdot d\vec{\theta}$$



$$\sum \vec{r}_i' \times \vec{f}_i = 0$$

$$\sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \vec{M}_c$$

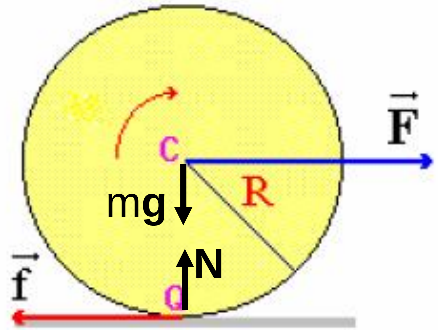
$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + \int \vec{M}_c \cdot d\vec{\theta}}$$

las fuerzas internas no realizan trabajo

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \Delta T_{or}$$

$$\int \vec{M}_c \cdot d\vec{\theta} = \Delta T'$$

Rodillo que rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal, sometido a una fuerza constante aplicada en su centro de masa. Vamos a obtener el trabajo mecánico realizado por las fuerzas a que se encuentra sometido el cuerpo.



$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + \int \vec{M}_c \cdot d\vec{\theta}$$

$$\vec{M}_C = f\,R\,(-\mathbf{k})$$

$$d\vec{\theta} = d\theta(-\mathbf{k})$$

$$W = \int F dx_c - \int f dx_c + \int f\,R d\theta$$

$$dx_c = R d\theta$$

$$W = \int F dx_c$$

La fuerza de <u>rozamiento no realiza trabajo</u> mecánico para el caso de objetos que <u>ruedan sin deslizar</u>

Conservación de la energía mecánica

$$W_{cons} + W_{no\ cons} = \Delta T$$

$$\Delta T + \Delta \Phi = W_{no\ cons} \qquad \Delta E = W_{no\ cons}$$

Si $W_{no\ cons} = 0$, se conserva la energía mecánica **E = cte**

$$E = T + \Phi \qquad E = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c w^2 + \Phi$$

$$\Phi_{grav} = mgh_{cm}$$

altura del centro de masa respecto
a un nivel de referencia arbitrario