

# TERCER EXAMEN DE PROMOCION

**Martes 10 de diciembre** 8 hs, Aula 121 (ex 11E cerca oficina Lujan Mario)

Los alumnos que rindan promoción no deben anotarse en mesa de final

## MESAS DE FINAL Y HORARIOS DE CONSULTA

CONSULTAR EN LA PAGINA

**Alumnos que cursaron por cambio de comisión: (alumnos que no son de Ing química, Ing, en alimentos o Lic. en química) deben avisarme por mail o personalmente una semana antes de rendir el final, sino no se podrán inscribir en la mesa que seleccionen**

# Cuerpo rígido: Ecuaciones de movimiento

$$\vec{F} = m\vec{a}_c$$

$$\vec{M}_c = I_c \vec{\alpha}$$

$$\vec{M}_Q = I_Q \vec{\alpha}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{c/A} \times \vec{F} + I_c \vec{\alpha}$$

**Momento respecto al centro de masa**

**Momento respecto a un punto fijo**

**Momento respecto a un punto A cualquiera**

Diagrama de cuerpo aislado 

### 3 ecuaciones de movimiento

$$i) \Sigma F_x = m a_{xc}$$

$$j) \Sigma F_y = m a_{yc}$$

Ecuación de movimiento para el centro de masa (2 ecuaciones escalares)

$$k) M_C = I_C \alpha$$

ó

$$k) M_Q = I_Q \alpha$$

respecto al c.m.

punto fijo

**Ecuación de momento**

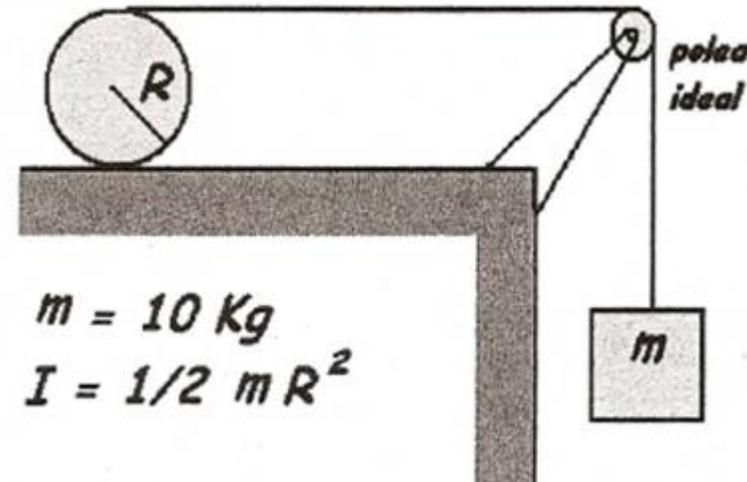
**Solo 1 ecuación escalar en k**

### Relaciones cinemáticas

**Problema 1**

Un cilindro de radio  $R = 0.5 \text{ m}$  y masa  $M = 10 \text{ Kg}$  rueda sin deslizar al ser jalado por la cuerda que va desenroscándose a medida que la pesa de masa  $m = 1 \text{ Kg}$  desciende. Calcular

- a) La aceleración angular del cilindro.
- b) La aceleración vertical de la masa  $m$ .
- c) La tensión en la cuerda.



# Energía cinética

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

$$T_{\text{or}} = \frac{1}{2}mv_c^2$$

**Término orbital de la energía cinética**

$$T' = \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

**Término intrínseco o de spin**

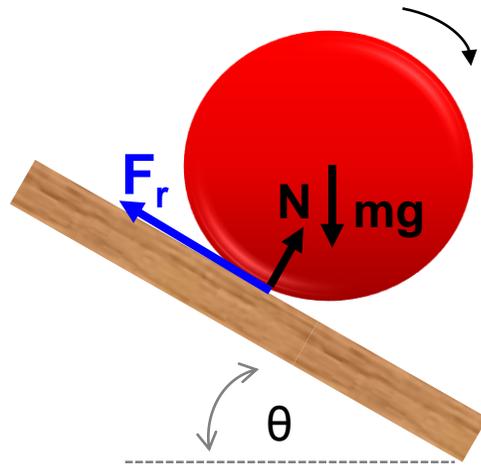
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + \int \vec{M}_c \cdot d\vec{\theta}$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \Delta T_{\text{or}}$$

$$\int \vec{M}_c \cdot d\vec{\theta} = \Delta T'$$

# Objeto que rueda sin deslizar

Repaso



$F_r$  es la única fuerza que puede producir **MOMENTO** respecto al centro de masa

Si rueda sin deslizar  $\rightarrow F_r$  es estática

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + \int \vec{M}_c \cdot d\vec{\theta}$$

La fuerza de rozamiento no realiza trabajo mecánico para el caso de objetos que ruedan sin deslizar

# Conservación de la energía mecánica

$$W_{\text{cons}} + W_{\text{no cons}} = \Delta T$$

$$\Delta T + \Delta \Phi = W_{\text{no cons}}$$

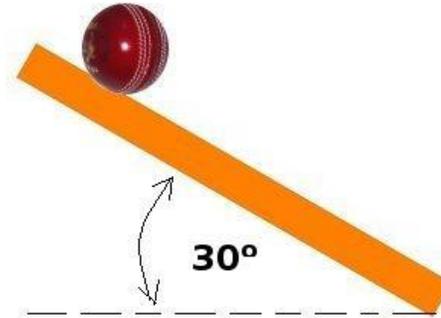
$$\Delta E = W_{\text{no cons}}$$

Si  $W_{\text{no cons}} = 0$ , se conserva la energía mecánica **E = cte**

$$E = T + \Phi$$

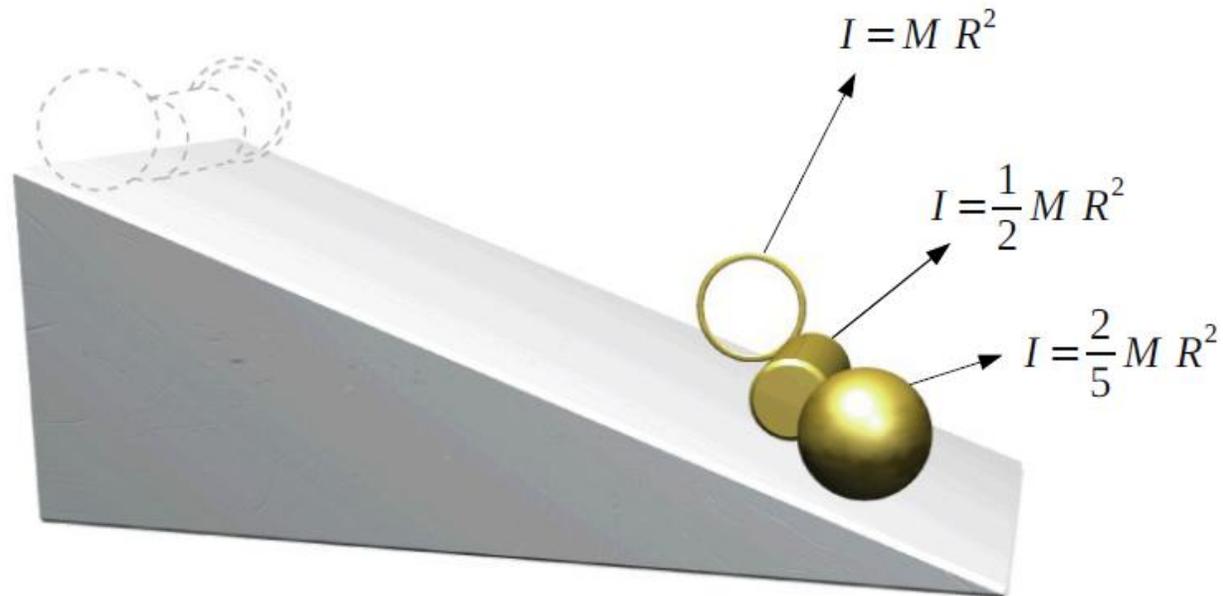
$$E = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c \omega^2 + \Phi$$

## Objeto que rueda sin deslizar por un plano inclinado



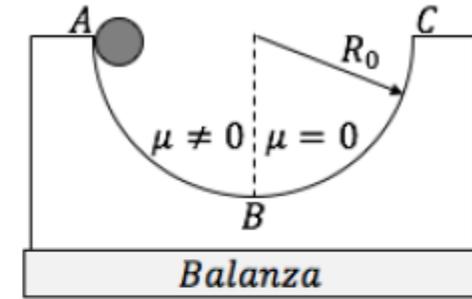
Si rueda sin deslizar, el sistema es conservativo,  
la fuerza de rozamiento no realiza trabajo mecánico

¿Cuál llega antes abajo: cilindro, anillo o esfera maciza?



## Ejemplo 2

**Problema 26.** En la figura se muestra un casquete esférico de radio  $R_0$  y masa  $M_0$ , apoyado sobre una balanza. Una esfera de masa  $M_1$  y radio  $R_1$ , se deja caer desde el punto  $A$ , indicado en la figura. Suponiendo que en el tramo  $AB$  la esfera rueda sin deslizar y que es nulo el rozamiento en el tramo  $BC$ , obtenga:



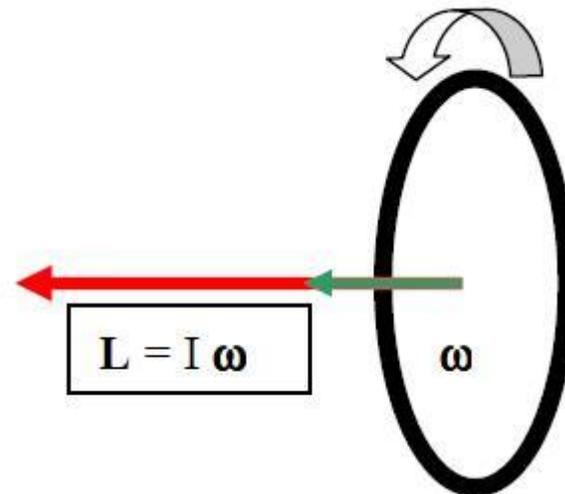
- Una expresión para la lectura de la balanza cuando el  $CM$  de la esfera pasa por el punto inferior de su trayectoria.
- Una expresión para la máxima altura que alcanzará el  $CM$  de la esfera a lo largo del tramo sin roce.

# Conservación del momento angular

Si un cuerpo está sometido a un conjunto de fuerzas tales que no generan momento respecto del centro de masa, su vector momento angular, determinado respecto de dicho punto, deberá permanecer constante e igual al que tenía en el instante inicial

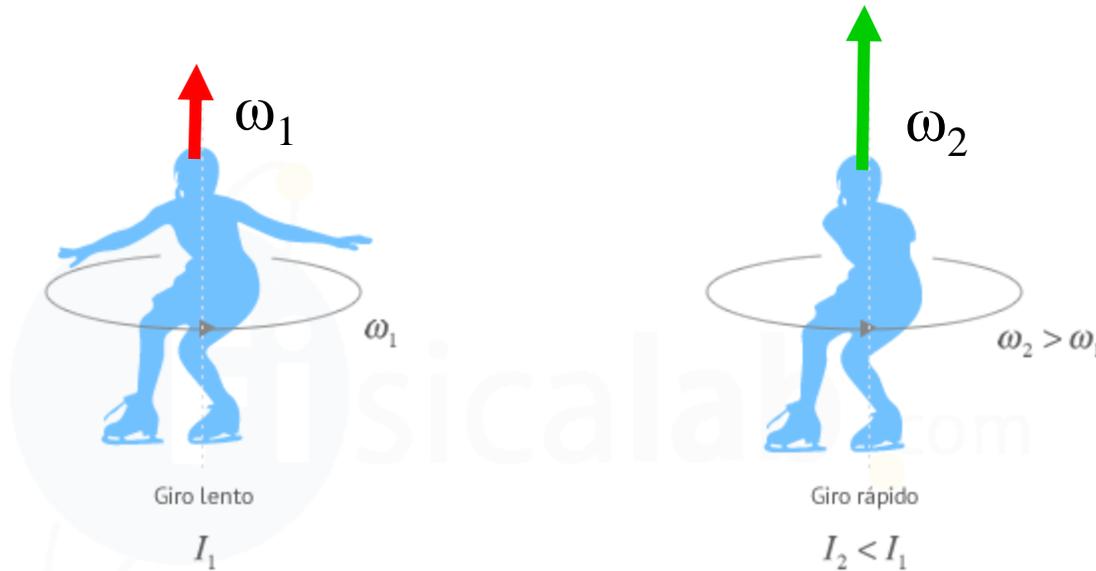
$$\vec{M}_c = 0 \Rightarrow \vec{L}_c = \text{cte} \quad \therefore \vec{L}_c = \vec{L}_o$$

$$\vec{L}_c = I_c \vec{\omega}$$

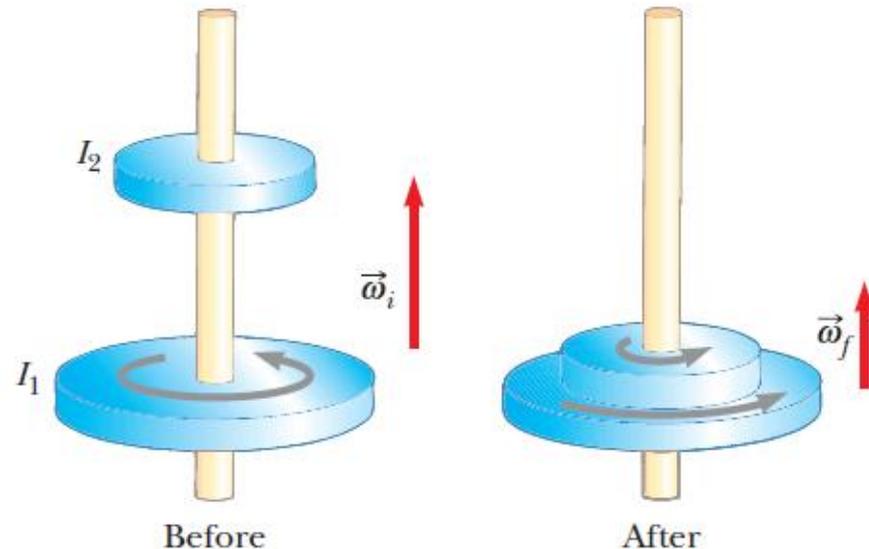


Una *patinadora* al juntar sus brazos hace que su masa se concentre más cerca del su cuerpo, por lo que el momento de inercia disminuye. Al disminuir el momento de inercia, la velocidad angular debe aumentar para mantener el momento angular constante (si se ignora la fricción con el hielo, no hay momentos externos)

$$(I_1 \cdot \omega_1)_{\text{antes}} = (I_2 \cdot \omega_2)_{\text{despues}}$$



Un disco con momento de inercia  $I_1$  está girando con velocidad angular inicial  $\omega_1$  alrededor de su eje de simetría sin rozamiento. Le cae encima otro disco con momento de inercia  $I_2$  que inicialmente está en reposo. Debido al rozamiento superficial, los dos discos adquieren una velocidad angular final  $\omega_f$ .



$$\vec{M} = 0$$

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

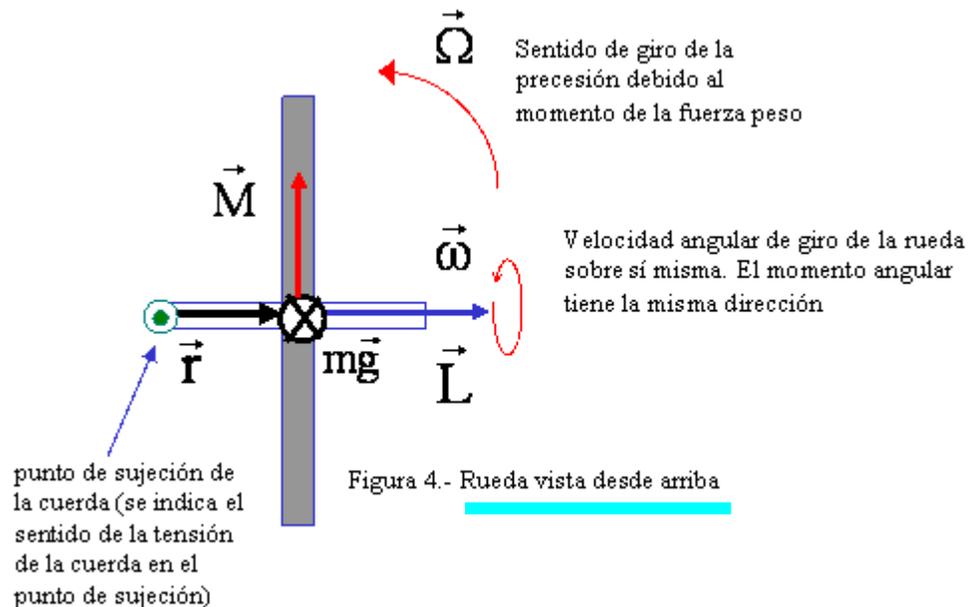
$$I_1 \cdot \omega_1 = (I_1 + I_2) \omega_f$$

¿Se conserva la energía mecánica?

**NO!!! la fuerza de rozamiento disipa energía**

## Y si hay un torque neto...

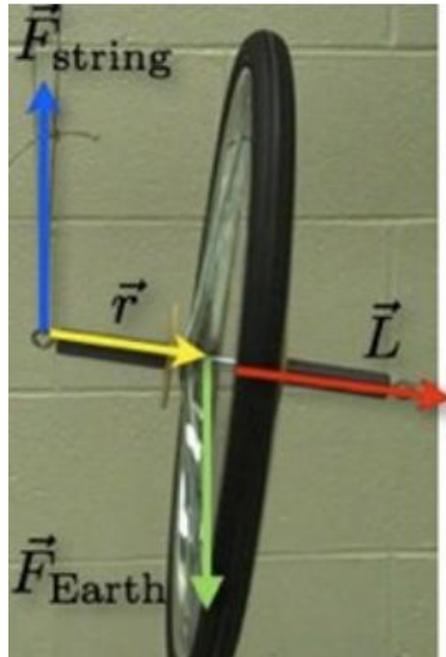
aparece un **movimiento de precesión**: el módulo del momento angular se mantiene constante, mientras el momento de la fuerza gravitatoria produce cambios en su dirección en cada instante, lo que obliga a la rueda a mantener su plano perpendicular al suelo, sin caer. (aunque la pérdida de energía mecánica por rozamiento hace disminuir progresivamente la frecuencia de rotación de la rueda y poco a poco ésta se va inclinando hasta parar y caer)



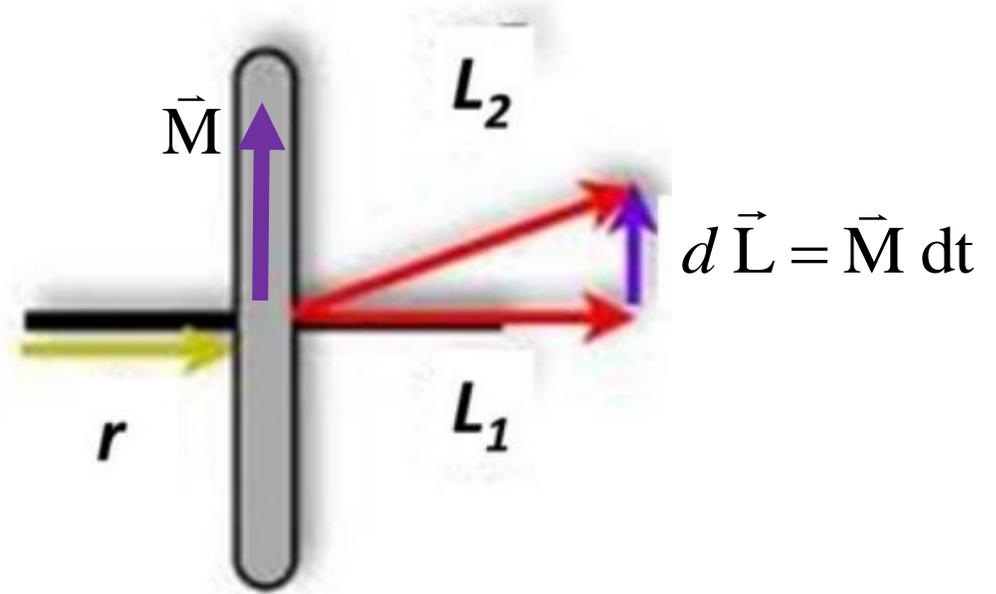
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow d\vec{L} = \vec{M} dt$$

# Y si hay un torque neto...

Vista de frente



Vista desde arriba



La fuerza peso produce momento (hacia "adentro de la pared") y hace que cambie el momento angular

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

# Mecánica de fluidos

**Fluido** es toda sustancia no sólida que tiene la capacidad de fluir, no mantiene su forma

**Gases** → expanden indefinidamente  
muy poca interacción entre moléculas

**Líquidos** → Fluyen bajo la gravedad hasta ocupar las partes más bajas del recinto que los contiene  
Las moléculas están muy unidas y ejercen fuerzas entre sí

**Densidad = masa de fluido por unidad de volumen**

$$\rho = \frac{M}{V}$$

S.I.  $\frac{kg}{m^3}$  C.G.S  $\frac{g}{cm^3}$

**TABLE 15.1**

Densities of Some Common Substances at Standard Temperature (0°C) and Pressure (Atmospheric)

Substance	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Substance	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Air	1.29	Ice	$0.917 \times 10^3$
Aluminum	$2.70 \times 10^3$	Iron	$7.86 \times 10^3$
Benzene	$0.879 \times 10^3$	Lead	$11.3 \times 10^3$
Copper	$8.92 \times 10^3$	Mercury	$13.6 \times 10^3$
Ethyl alcohol	$0.806 \times 10^3$	Oak	$0.710 \times 10^3$
Fresh water	$1.00 \times 10^3$	Oxygen gas	1.43

$$\text{Densidad específica} = \rho / \rho_{\text{agua}}$$

adimensional

# Presión

Cuando se sumerge un cuerpo en un fluido como el agua, el fluido ejerce una fuerza perpendicular a la superficie del cuerpo en cada punto de la superficie

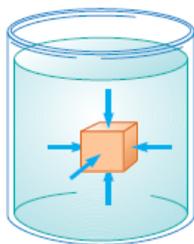
Es debida al choque de las moléculas del fluido con las paredes del cuerpo (y también del recipiente)

Esta fuerza por unidad de área se llama presión (en esta expresión F es la magnitud de la fuerza),  
Es una cantidad escalar

$$P = F/A$$

La unidad de medida es el Pascal  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} = 101.325 \text{ kPa}$$



**La fuerza ejercida por un fluido en un objeto sumergido en cualquier punto es perpendicular a la superficie del objeto.**

**La fuerza es un vector y la presión es un escalar. No se asocia ninguna dirección a la presión, pero la dirección de la fuerza asociada es perpendicular a la superficie**



Raquetas de nieve  
peso distribuido en un área grande

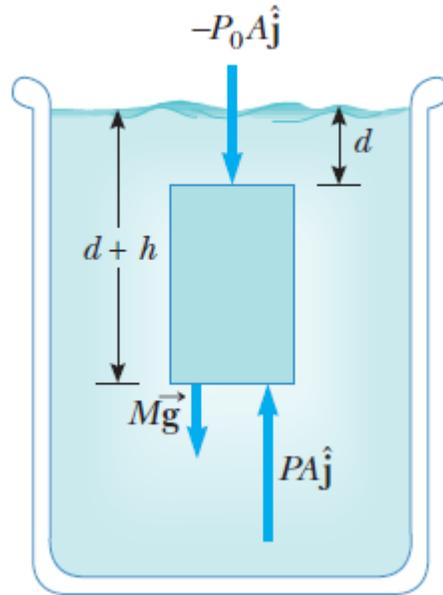


baja presión

En zapatos comunes, la presión sería mayor y la persona se hundiría!

# Variación de la presión con la profundidad

Consideremos un **líquido en reposo** con densidad constante



$$\sum F_y = 0 \rightarrow PA - P_0 A - Mg = 0$$

$$M = \rho V = \rho Ah$$

$$PA = P_0 A + \rho g Ah$$

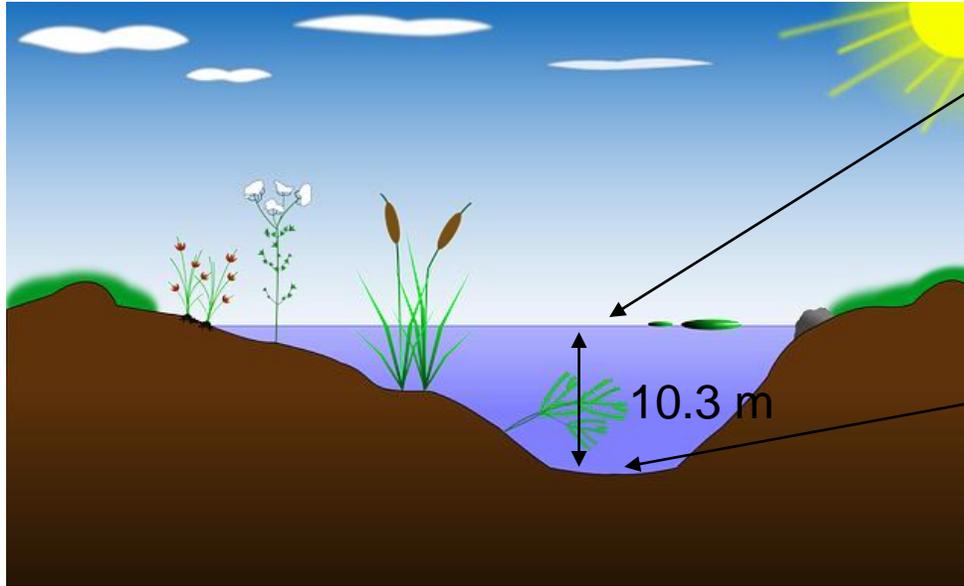
$$P = P_0 + \rho gh$$

$$P = F/A$$

OJO! También hay fuerzas laterales pero se cancelan

**La *presión aumenta linealmente* con la *profundidad***

Sabiendo que la presión en la superficie de un lago es de 1 atm, a qué profundidad la presión es el doble?

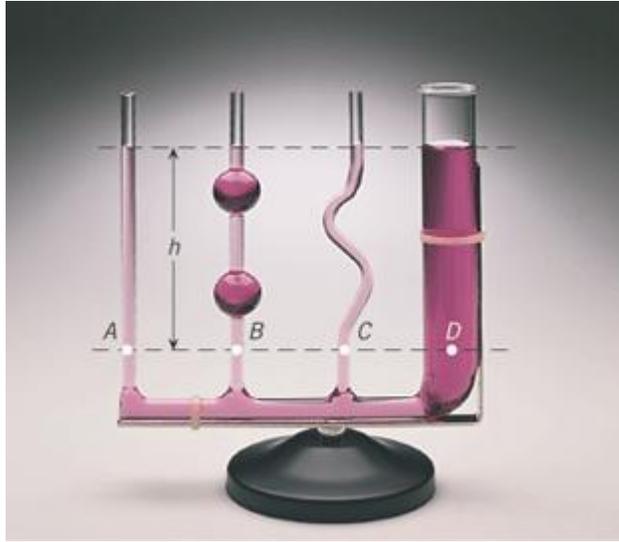


$P_0=1 \text{ atm}=101.325 \text{ kPa}$

$P=2 \text{ atm}= 202.65 \text{ kPa}$   
 $\rho=1 \text{ kg/l} =1000 \text{ kg/m}^3$

$$P = P_0 + \rho gh$$

$$h=\Delta P/\rho \cdot g=10.3 \text{ m}$$



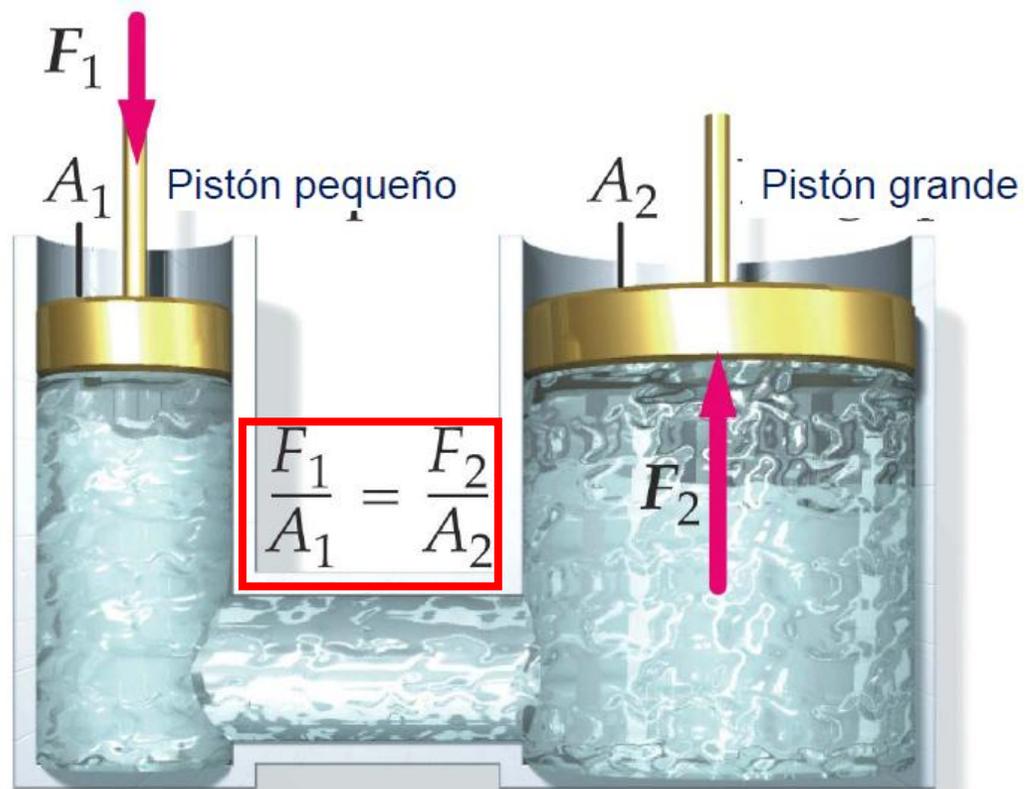
**Los puntos *A*, *B*, *C*, and *D* están a la misma profundidad *h* de la superficie del líquido, la presión es la misma en todos los puntos.**

**La presión es la misma en todos los puntos que están a una misma profundidad**

### **Principio de Pascal**

***Un cambio de presión aplicado a un líquido encerrado dentro de un recipiente se transmite por igual a todos los puntos del fluido y a las propias paredes del recipiente***

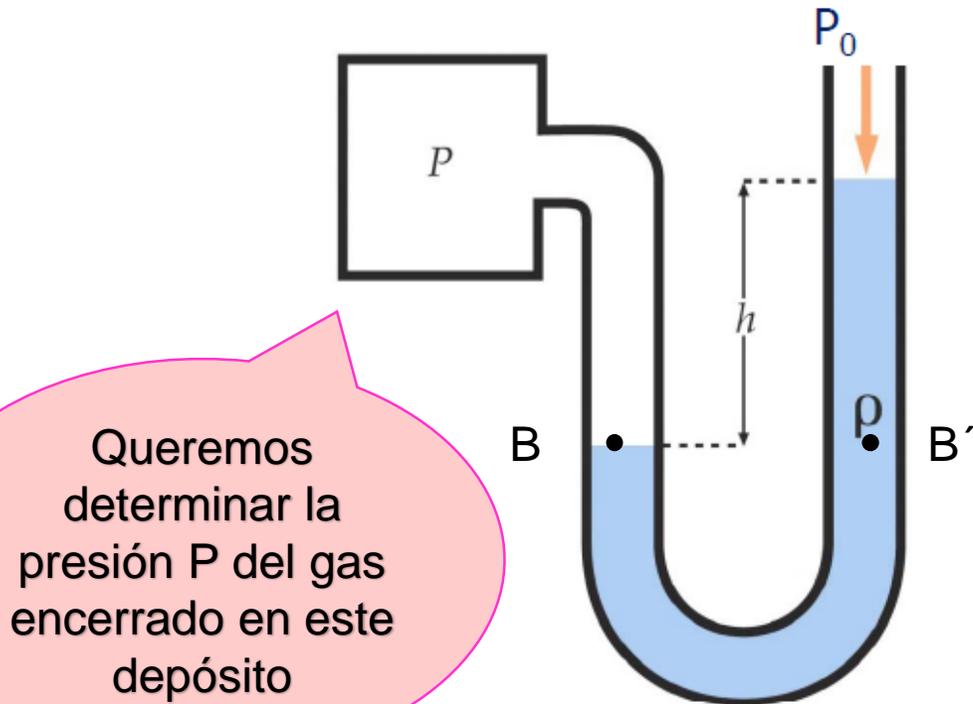
# Aplicación: prensa hidráulica



Ejerciendo una **pequeña fuerza  $F_1$**  se obtiene una **fuerza grande  $F_2$**  que permite prensar grandes pesos

# Manómetro de tubo abierto

instrumento para medir presiones



$$P_B = P$$

$$P_B = P_{B'} = P \text{ por estar al mismo nivel}$$

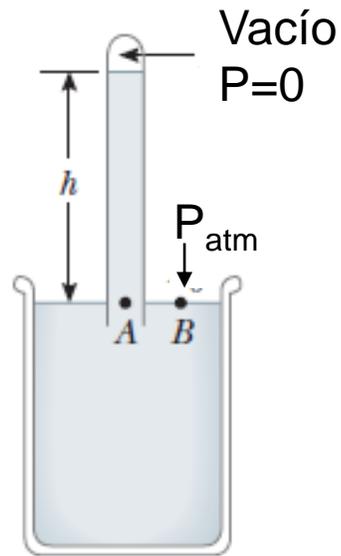
$$P = P_0 + \rho g h$$

Presión manométrica

$$P - P_0 = \rho g h$$

# Barómetro

mide la presión atmosférica



$$P_A = P_B = P_{\text{atm}}$$

$$P_A = 0 + \rho g h$$

$$P_{\text{atm}} = \rho g h$$

En la práctica la presión se mide en milímetros de mercurio (mmHg)

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 101325 \text{ Pa}$$

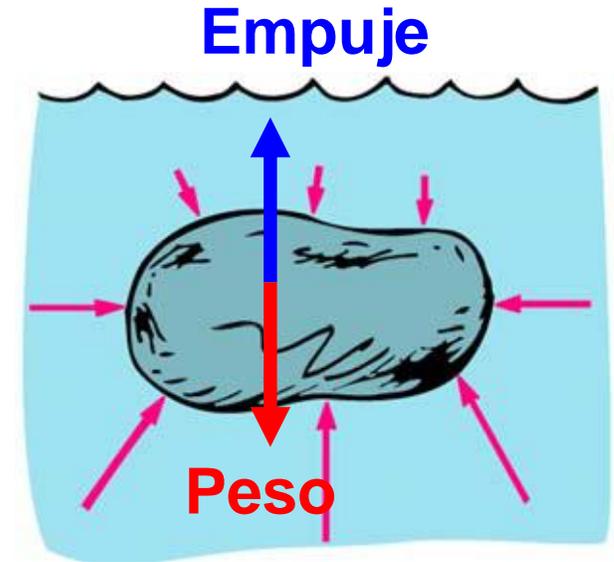
# Empuje

El fluido ejerce una presión en todos los puntos del objeto en reposo y produce fuerzas superficiales perpendiculares a la superficie de ese objeto

Actúa mayor presión sobre la superficie de abajo que sobre la de arriba (la presión aumenta con la profundidad).

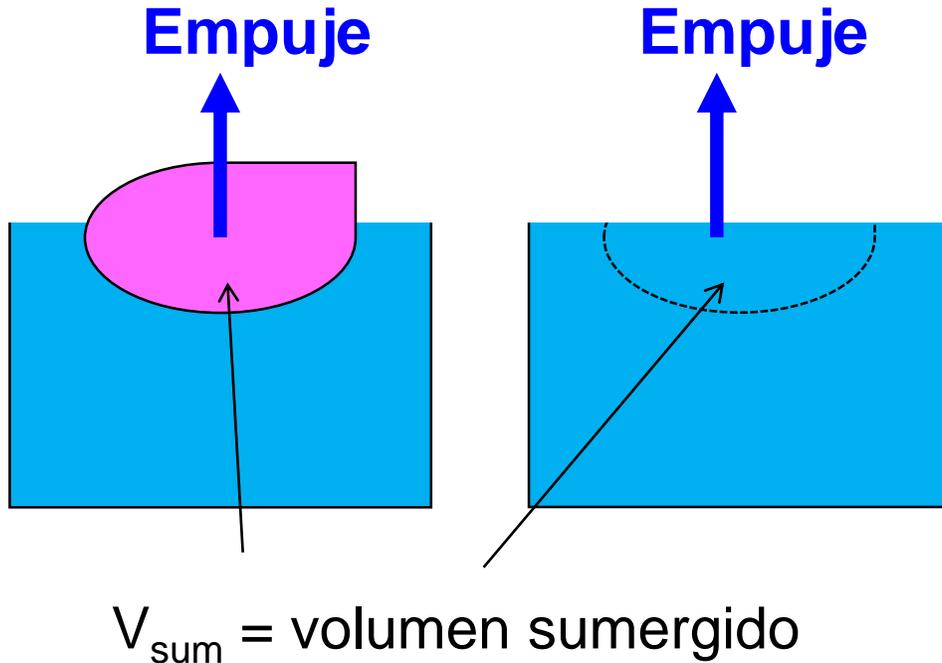
El efecto neto es tener una fuerza que va hacia arriba llamada *empuje* (las fuerzas horizontales se anulan entre sí)

El sistema de fuerzas que actúa sobre el cuerpo debe estar en equilibrio



Consideremos un cuerpo parcialmente sumergido en equilibrio

Supongamos que quitamos el cuerpo y reemplazamos el volumen sumergido  $V_{\text{sum}}$  con líquido  $\rightarrow$  sistema en equilibrio



sobre ambas superficies  
actúan las mismas presiones

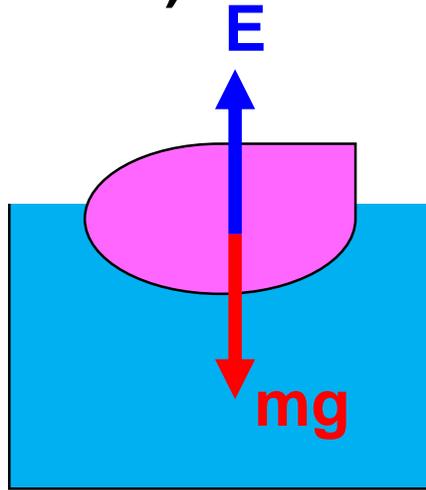
$E =$  peso del líquido en  $V_{\text{sum}}$

$$E = \rho_{\text{liq}} g V_{\text{sum}}$$

### Principio de Arquímedes

*Todo cuerpo parcial o totalmente sumergido en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del fluido desplazado.*

Se deben analizar todas las fuerzas que actúan y plantear el equilibrio de fuerzas (ley de Newton)



$$E = \rho_{\text{liq}} g V_{\text{sum}}$$

No depende de la forma del objeto sino solo del volumen sumergido

$$mg = \rho_{\text{cuerpo}} V g$$

Volumen TOTAL del cuerpo

equilibrio de fuerzas:  $E - mg = 0$

$$\rho_{\text{liq}} g V_{\text{sum}} = \rho_{\text{cuerpo}} g V$$

$$\rho_{\text{liq}} V_{\text{sum}} = \rho_{\text{cuerpo}} V$$

Si se sumerge totalmente  $\rho_{\text{liq}} = \rho_{\text{cuerpo}}$

Si se sumerge parcialmente ( $V_{\text{sum}} < V$ )

$\rho_{\text{liq}} > \rho_{\text{cuerpo}}$

Aplicación principio de Arquímedes y de Pascal: **fantasmita de la botella**  
(diablillo de descartes)

**La densidad de la madera es de unos 0.5 a 0.8 g/cm<sup>3</sup> por lo que no resulta sorprendente que los barcos de madera floten ( $\rho = 1.00$  y 1.03 g/cm<sup>3</sup> para agua dulce y salada)**

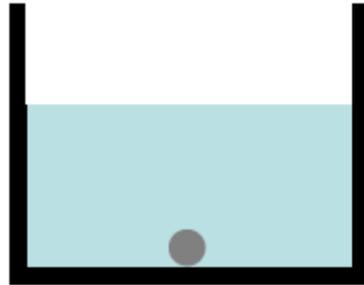


**La densidad del hierro es de 7.9 g/cm<sup>3</sup>.  
¿Cómo es que entonces los buques de guerra pueden flotar?**

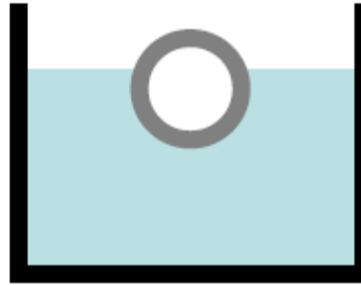


**Cuando un objeto no es completamente sólido entonces flota si la densidad promedio (masa total)/(volumen total), es menor que la densidad del fluido**

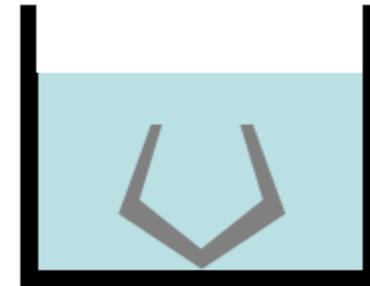
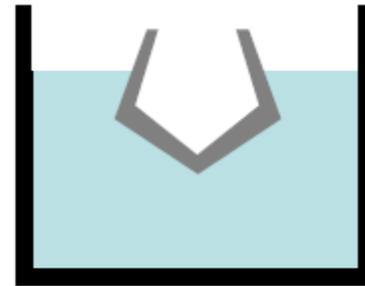
Bola de hierro sólida  
Volumen: 100 cc  
Masa: 790 g  
Densidad: 7.9 g/cc



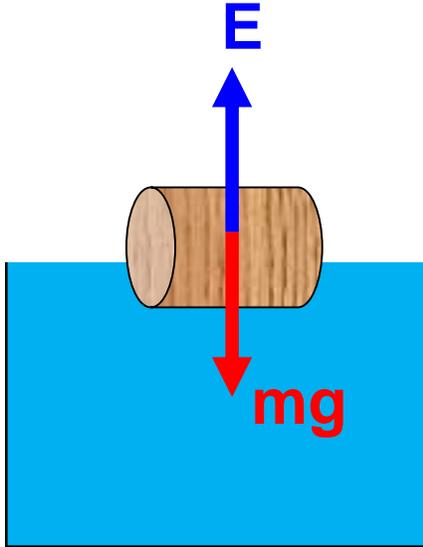
Bola de hierro, 90% hueca  
Volumen: 1000 cc  
Masa: 790 g  
Densidad: 0.79 g/cc



**Los barcos de hierro flotan porque son huecos por dentro.  
Si el agua inundase el interior, el barco se hundiría**



**Ejemplo:** un corcho posee una densidad de  $200 \text{ kg/m}^3$ . Determinar que fracción de volumen de corcho se sumerge cuando éste flota en agua



**equilibrio de fuerzas**

$$E - mg = 0$$

$$E = \rho_{\text{liq}} g V_{\text{sum}}$$

$$mg = \rho_{\text{corcho}} g V$$

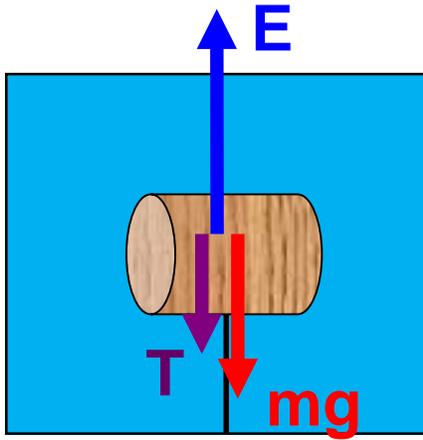
$$\rho_{\text{liq}} g V_{\text{sum}} = \rho_{\text{corcho}} g V$$

$$V_{\text{sum}} / V = \rho_{\text{cuerpo}} / \rho_{\text{liq}} = 200 / 1000$$

$$V_{\text{sum}} / V = 1/5$$

RTA: 1/5 del corcho está sumergido

¿Y si el corcho estuviera sujeto al fondo del recipiente con una cuerda, cuál sería la tensión de la misma?



**equilibrio de fuerzas**

$$E - mg - T = 0$$

$$E = \rho_{\text{liq}} g V \quad \text{ahora } V_{\text{sum}} = V$$

$$mg = \rho_{\text{corcho}} g V$$

$$\rho_{\text{liq}} g V - \rho_{\text{corcho}} g V - T = 0$$

$$T = (\rho_{\text{liq}} - \rho_{\text{corcho}}) Vg$$

**El empuje no solamente actúa sobre cuerpos sumergidos en líquidos. También actúa sobre los cuerpos sumergidos en la atmósfera.**



**Los globos aerostáticos tienen un volumen muy grande y se los llena de helio, un gas más liviano que el aire.**

**El globo asciende porque el empuje que el aire le aplica es mayor que su peso**