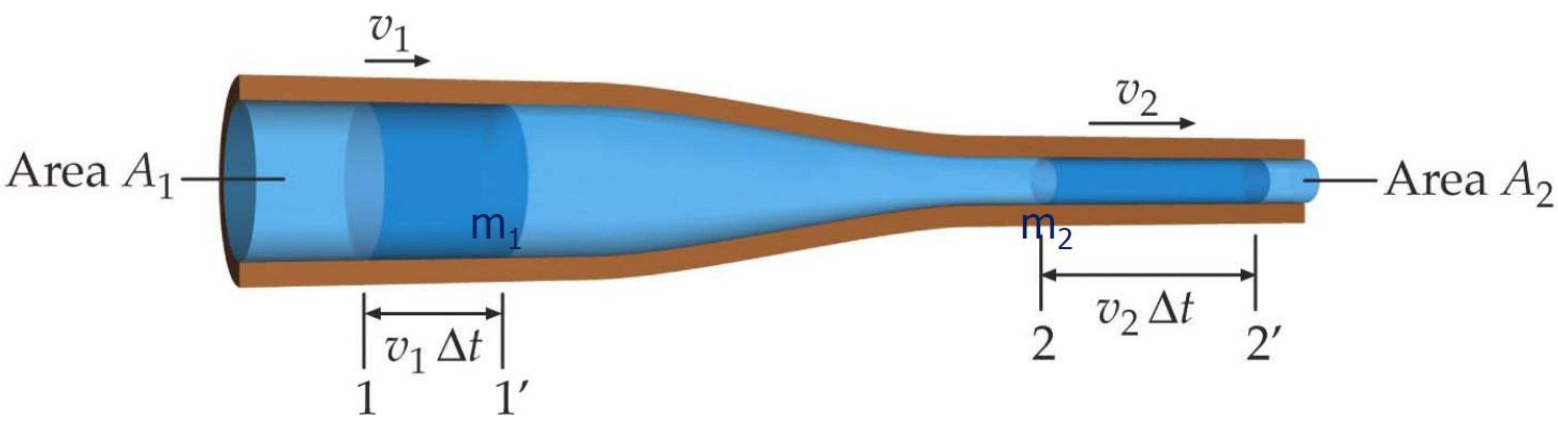
Fluidos en movimiento

Fluido estacionario: la velocidad de las partículas de fluido no cambia con el tiempo (si puede variar punto a punto)

Fluido incompresible: densidad constante

Fluido no viscoso: no pierde energía al fluir

Consideremos que el fluido circula por un tubo de sección variable. En un cierto intervalo de tiempo ingresa líquido por el área A1



Volumen de líquido que entra = $A_1\, v_1\, \Delta t$

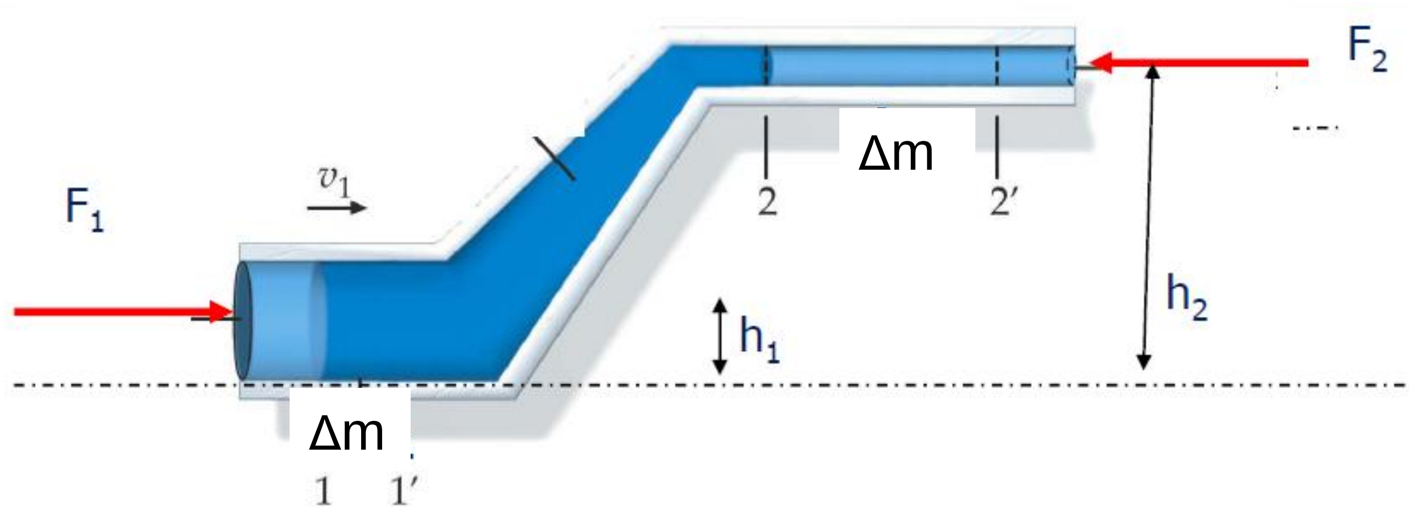
Por ser incompresible, debe salir el mismo volumen por A_2

$$A_1\, v_1\, \Delta t = A_2\, v_2\, \Delta t$$

$$\boxed{A_1\, v_1 = A_2\, v_2 = Caudal}$$ **Ecuación de continuidad**

Donde la sección es menor, la velocidad es mayor

Consideremos que el fluido circula por un tubo cuya altura y sección van variando. En Δt el fluido pasa de estar entre 1 y 2 a 1' y 2'



Efecto en
$\Delta m = \rho\, \Delta V$

h_1 a h_2
v_1 a v_2

$\Delta \Phi = \Delta m\, g (h_2 - h_1) = \rho\, \Delta V\, g\, (h_2 - h_1)$ $\quad$ $\Delta T = ½\, \Delta m\, v_2^2 - ½\, \Delta m\, v_1^2 = ½\, \rho\, \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$

$F_1 = P_1 A_1 \quad W_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 \Delta V \qquad F_2 = P_2 A_2 \quad W_2 = - P_2 A_2 \Delta x_2 = -P_2 \Delta V$

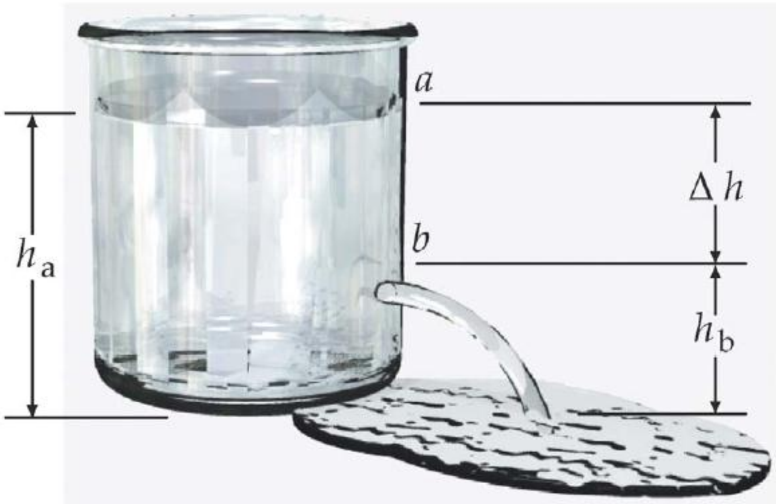
$W_1 + W_2 + W_{mg} = \Delta T$

$P_1 \Delta V - P_2 \Delta V - \rho\, g\, \Delta V\, (h_2 - h_1) = ½\, \rho\, \Delta V\, (v_2^2 - v_1^2)$

$P_1 + \rho\, g\, h_1 + ½\, \rho\, v_1^2 = P_2 + \rho\, g\, h_2 + ½\, \rho\, v_2^2$

$$\boxed{P + \rho\, g\, h + ½\, \rho\, v^2 = cte}$$

Ecuación de Bernoulli



La velocidad del fluido en el punto a es despreciable por ser un depósito grande:
$V_a=0$

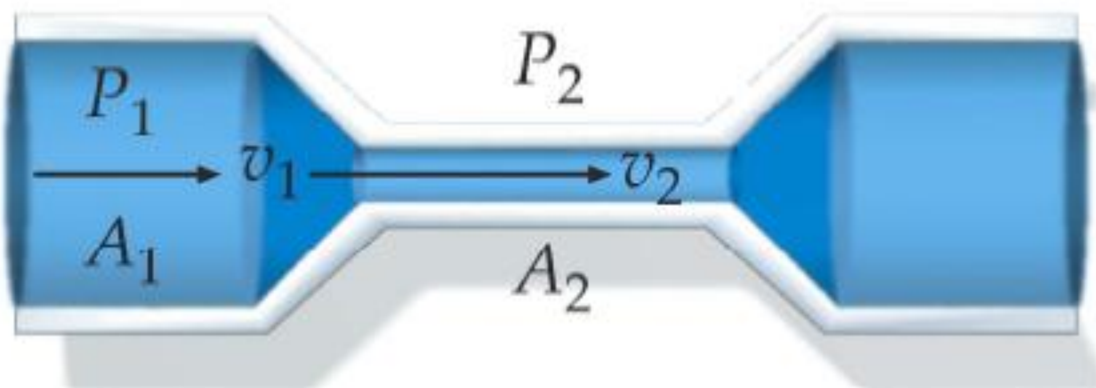
a y b abiertos a las atmósfera
$P_a=P_b=P_{atm}$

Ecuación de Bernoulli en a y en b

$$\cancel{P}atm + \rho\, g\, h_a = \cancel{P}atm + \rho\, g\, h_b + \tfrac{1}{2}\rho\, v_b^2$$

$$v_b = \sqrt{2g\,(h_a - h_b)} = \sqrt{2g\Delta h}$$

La velocidad de salida del fluido en el punto b es igual a la velocidad que adquiriría una partícula que se dejase en caída libre desde a, después de recorrer la distancia Δh



En puntos a igual altura

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = cte$$

Por ecuación de continuidad A v = cte

$v_2 > v_1$

Por ecuación de Bernoulli

$P_2 < P_1$

Efecto Venturi

Se reduce la presión en las zonas mas estrechas, donde la velocidad del fluido es mayor

Ondas Mecánicas

Una onda es una perturbación que viaja

Una onda lleva energía de un lugar a otro

Las ondas mecánicas se originan mediante una perturbación de un medio

Una onda mecánica es una perturbación que se propaga a través de un medio elástico y transporta energía sin un transporte neto de materia.

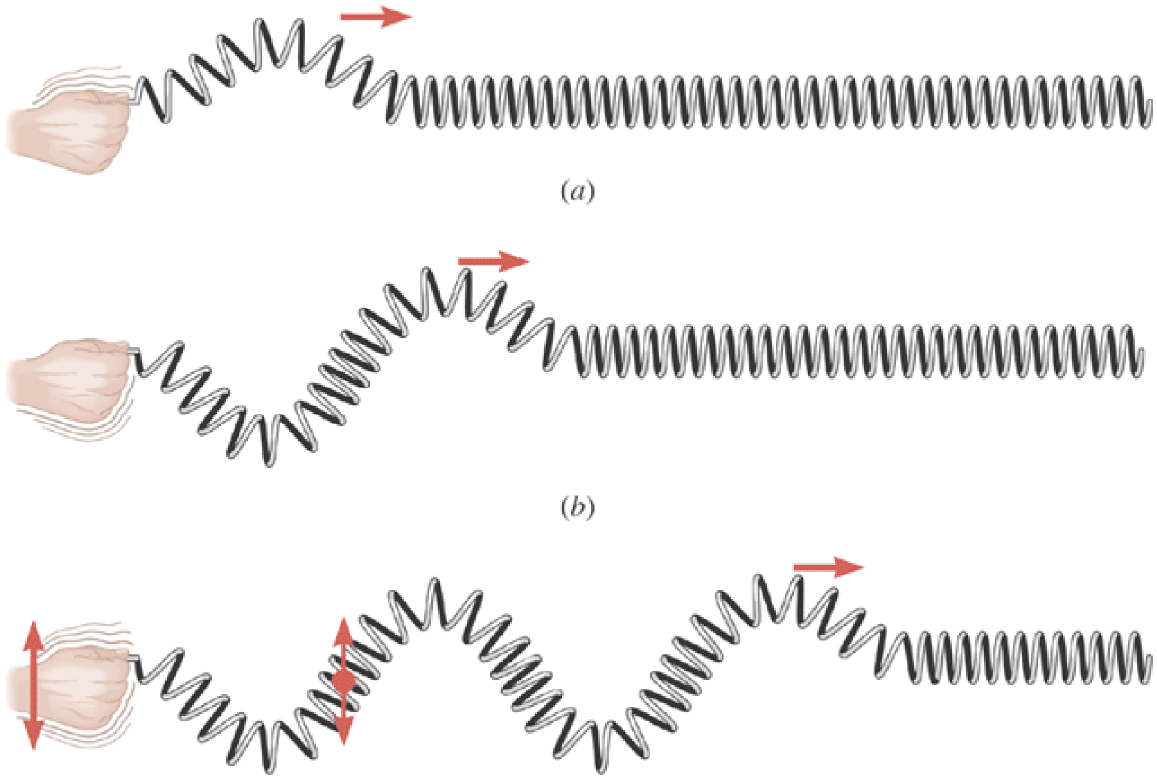
Clasificación de las ondas en función del ***medio*** de propagación :

- **Ondas mecánicas:** Necesitan propagarse a través de la materia (cuerdas, barras, sonido, fluidos)

- Ondas electromagnéticas: No necesitan medio para propagarse, se pueden propagar en el vacío (luz, rayos X etc)

Onda transversal

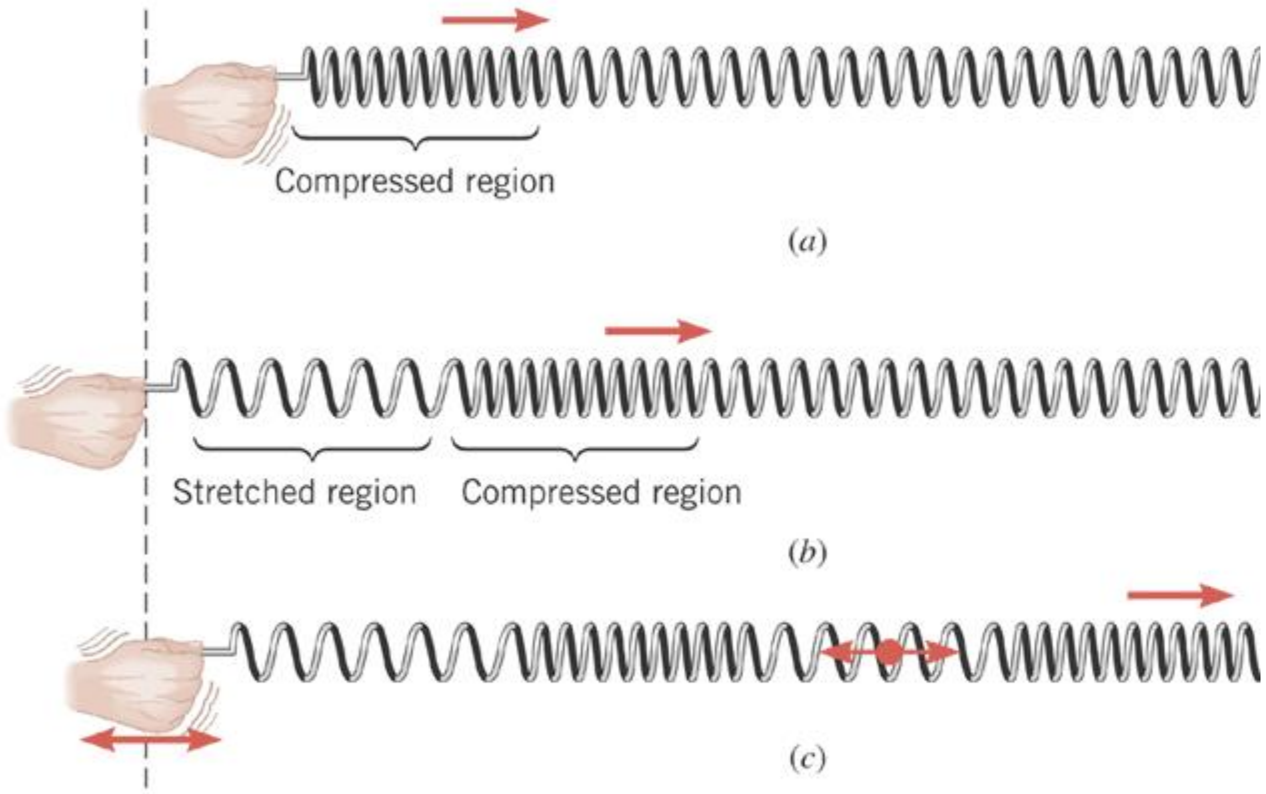
Cuando la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación



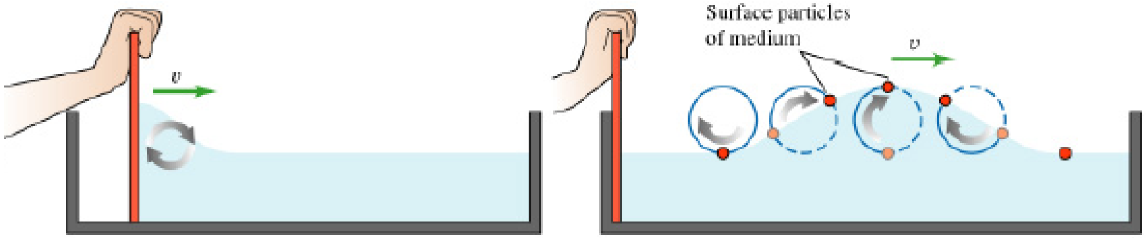
(a) (b) (c)

Onda longitudinal

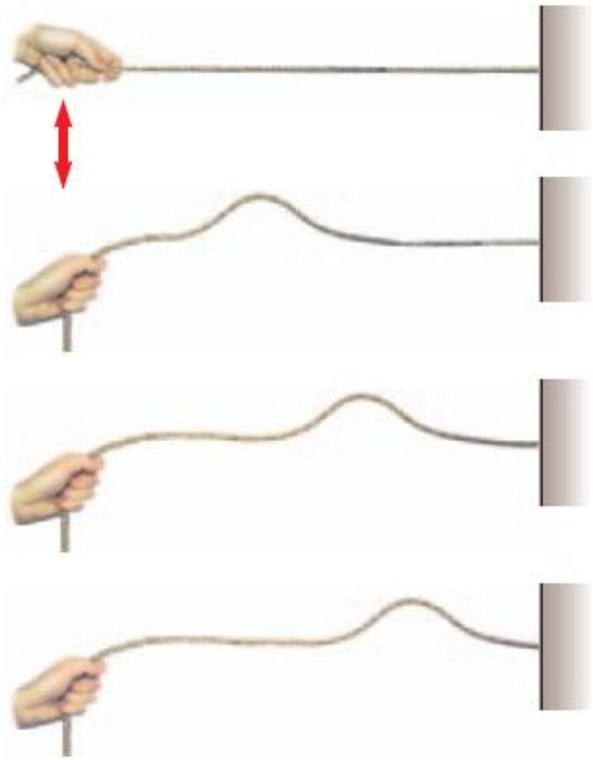
Cuando la perturbación es paralela a la dirección de propagación



En general, podemos tener combinaciones de ambas:

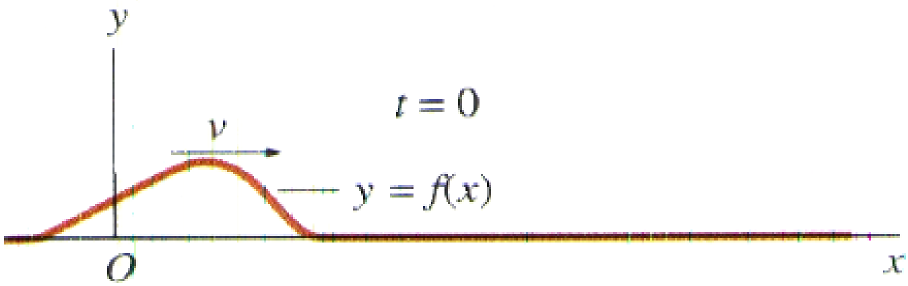


Pulsos de onda

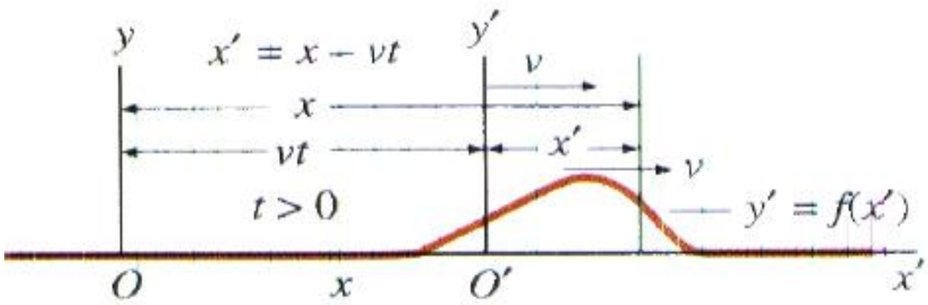


Perturbación: variación de la forma de la cuerda

Se mueve a lo largo de la cuerda. Consideramos que no cambia de forma al propagarse



Un pulso en una cuerda en el instante t = 0. La forma de la cuerda en este instante puede representarse por una función y = f (x).



Un cierto tiempo después el pulso se ha desplazado por la cuerda,
En un sistema de coordenadas con origen O´ que se mueve con la velocidad del pulso, este es estacionario. La cuerda se describe por f (x´) en todo instante.

$$x = x' + \nu t \qquad f(x') = f(x - \nu t)$$

velocidad de propagación del pulso

Pulso que viaja hacia la derecha $y(x,t) = f(x - \mathrm{v}t)$

Pulso que viaja hacia la izquierda $y(x,t) = f(x + \mathrm{v}t)$

función de onda

$$y(x,t) = f(x - \mathrm{v}t) \longrightarrow$$ **función de onda**

Función de dos variables: x, t $\longrightarrow$ $\boxed{x - \mathrm{v}t}$

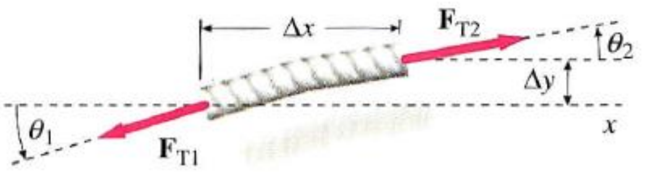
En el caso de una cuerda, la función de onda representa el desplazamiento vertical de la cuerda en el punto x y en un cierto tiempo t.

Para ondas sonoras en el aire, la función de onda puede ser el desplazamiento longitudinal de las moleculas gaseosas o la presión del aire.

Una función de onda en general es solución de una ecuación diferencial denominada **ecuación de onda**

La ecuación de onda

segmento de una cuerda tensa → aplico la ley de Newton



F_T tensión de la cuerda
μ masa por unidad de longitud

$$F_{T2} = F_{T1} = F_T$$

$$\sum F_y = F_T \operatorname{sen} \theta_2 - F_T \operatorname{sen} \theta_1$$

ángulos pequeños, sen θ ~ tg θ

$$\sum F_y = F_T(\operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1) \approx F_T(\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1)$$

tg θ es la pendiente de la curva formada por la cuerda $S = \operatorname{tg} \theta = \dfrac{\partial y}{\partial x}$

$$\sum F_y = F_T(S_2 - S_1) = F_T \, \Delta S$$

fuerza neta $\boxed{F_T \, \Delta S} = \boxed{\mu \, \Delta x} \boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$ aceleración

masa

$$F_T \Delta S = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad F_T \frac{\Delta S}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \quad (1)$$

Podemos demostrar que cualquier función de $x - vt$, o $x + vt$ satisface esta ecuación

$$\alpha = x - vt \qquad y = y(x - vt) = y(\alpha)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y' \frac{\partial \alpha}{\partial x} \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial (x - vt)}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = y' \qquad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y''}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = y' \frac{\partial \alpha}{\partial t} \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial (x - vt)}{\partial t} = -v \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -vy'$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v\frac{\partial y'}{\partial t} = -v\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = +v^2 y''}$$

Igualando y'' de ambas expresiones

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \quad (2)$$

De (1) y (2)

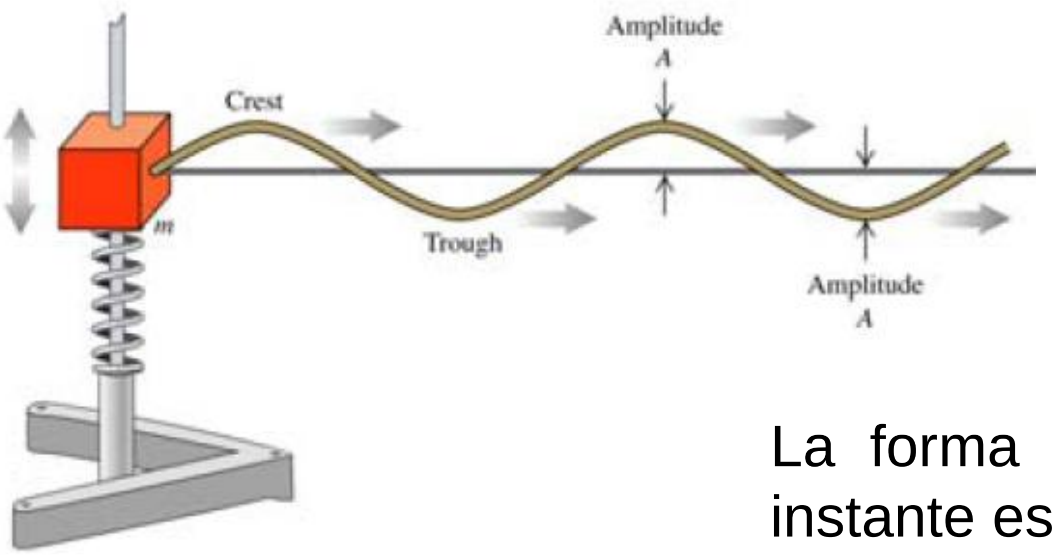
$$\boxed{v = \sqrt{F_T/\mu}}$$

Velocidad de propagación

Ecuación de onda

Ondas armónicas

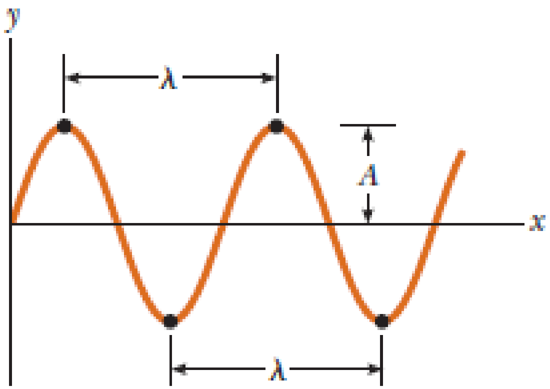
Si el extremo de una cuerda tensa se mueve de forma periódica hacia arriba y hacia abajo siguiendo un M.A.S. se produce un tren de ondas sinusoidales que se propagan por la cuerda: **onda armónica**



La forma de la cuerda en un cierto instante es de la forma seno o coseno

Cada punto de la cuerda se mueve hacia arriba y abajo realizando un M.A.S.

a t fijo



longitud de onda (λ): distancia que existe entre dos puntos consecutivos de la perturbación que oscilan en la misma fase

amplitud (A) es la distancia de una cresta a donde la onda está en equilibrio.

período (T): tiempo que tarda cada punto de la perturbación en realizar una oscilación completa.

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

frecuencia (f): número de oscilaciones completas que realiza cada punto de la perturbación en cada segundo.

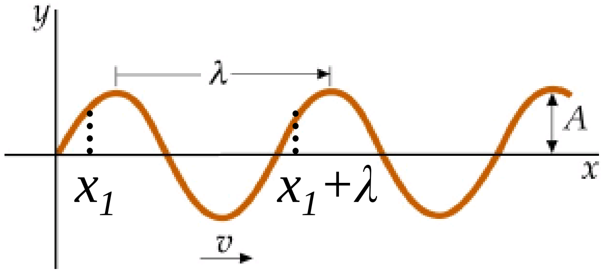
Durante un período la onda recorre una distancia igual a una longitud de onda

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T} = f\,\lambda}$$

Para un determinado tiempo la función que describe el desplazamiento es

$$y(x,0) = A sen\, k\, x$$

Si nos movemos desde un punto x_1 hasta otro $x_1+\lambda$, el argumento de la función seno variará en 2π



$$k(x_1+\lambda) - k(x_1) = 2\pi$$

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

número de onda

Para describir una onda que se propaga a la derecha sustituyo $x \rightarrow x - vt$

hacia la derecha

$$\boxed{y(x,t) = A sen[\frac{2\pi}{\lambda}(x - \mathrm{v}t)]}$$

hacia la izquierda

$$\boxed{y(x,t) = A sen[\frac{2\pi}{\lambda}(x + \mathrm{v}t)]}$$

frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{y(x,t) = A sen(kx \mp \omega t)}$$

Ejercicio: La función de onda de una onda armónica que se mueve sobre una cuerda es: *y(x,t) = (0.03 m) sen [(2.2 m⁻¹)x –(3.5 s⁻¹)t]*

a)¿En qué dirección se propaga la onda y cuál es su velocidad?

b) Determinar la longitud de onda, la frecuencia y el período de la onda.

c) ¿Cuál es el desplazamiento máximo de cualquier segmento de la cuerda?

d) ¿Cuál es el la velocidad máxima de cualquier segmento de la cuerda?

$y(x,t) = (0.03\ m)\ sen\ [(2.2\ m^{-1})x - (3.5\ s^{-1})t]$

$$y(x,t) = A sen(kx \mp \omega t)$$

Amplitud, A = 0.03 m

$k = 2.2\ m^{-1}$

$\omega = 3.5\ s^{-1}$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2.86\ \mathrm{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}8\ s$$

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T} = 1.59\ m/s}$$

a) La onda se propaga hacia la derecha con una velocidad de 1.59 m/s

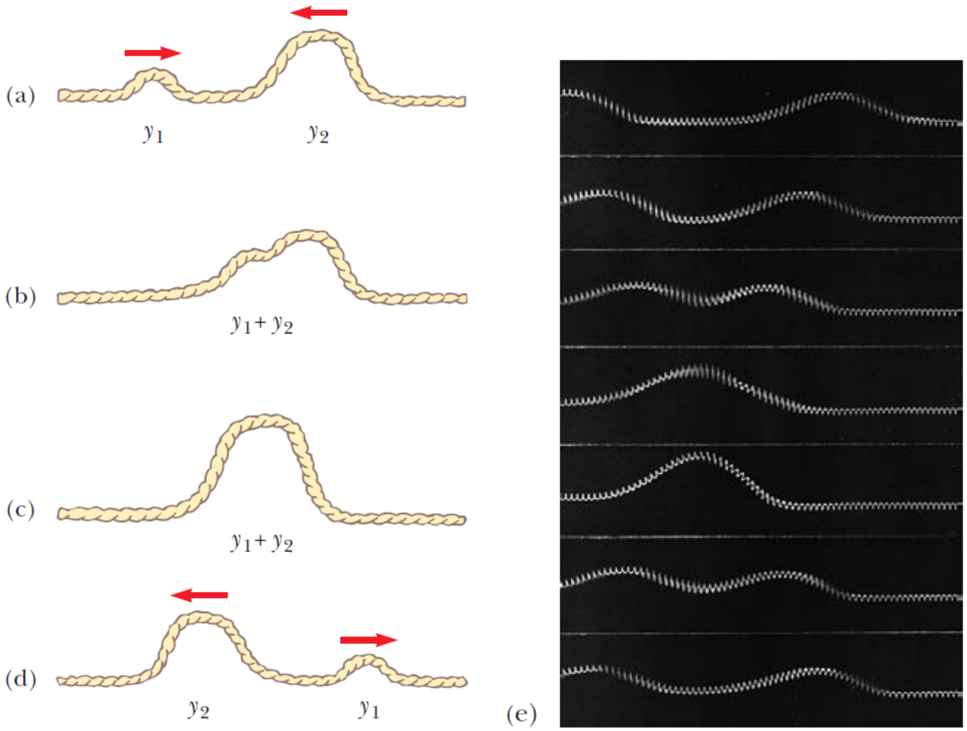
c) El desplazamiento máximo es su amplitud, 0.03 m

d) $$velocidad\ de\ un\ punto\ de\ la\ cuerda = \frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{máxima} = 0.105\ m/s$$

Superposición e interferencia de Ondas Armónicas

Principio de Superposición:

Cuando una o más ondas de la misma naturaleza se encuentran en un punto al mismo tiempo, la amplitud instantánea allí, es la suma de las amplitudes instantáneas de cada una de las ondas individuales.



Dos ondas armónica que se propagan hacia la derecha, con la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud pero que difieren en fase en Φ

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \qquad y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

La onda resultante es la suma (ppio. de superposición)

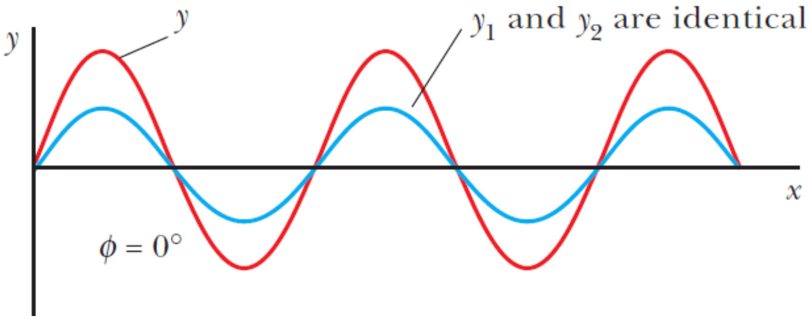
$$y = y_1 + y_2 = A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \phi)]$$

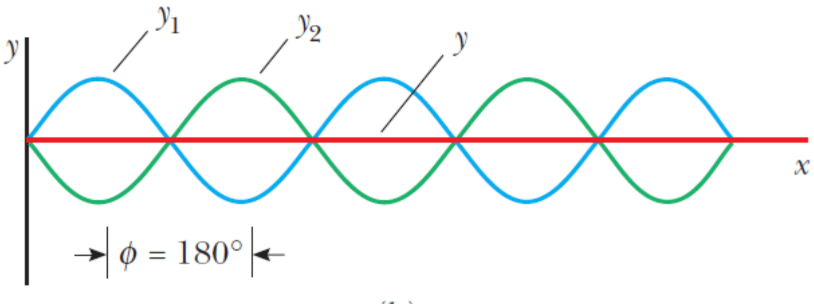
$\Phi = 0$

Interferencia constructiva

$\Phi = 180$

Interferencia destructiva



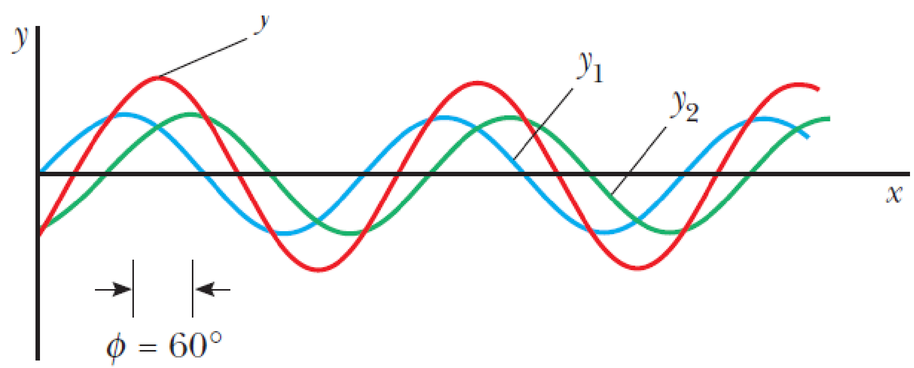


$$y = y_1 + y_2 = A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \phi)]$$

$$\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad \begin{aligned} a &= kx - \omega t \\ b &= kx - \omega t + \phi \end{aligned}$$

$$y = \left(2A\cos\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

La superposición de dos ondas armónicas da otra onda armónica con el mismo número de onda y la misma frecuencia pero con distinta amplitud



Ondas Estacionarias

Consideremos dos ondas idénticas que viajan en direcciones opuestas

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t) \qquad y_2 = A\sin(kx + \omega t)$$

$$y = y_1 + y_2 = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)$$

$$\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\boxed{y = (2A\sin kx)\cos\omega t}$$

Separada la parte espacial de la temporal
No es una onda que se propaga

Cuando dos ondas de igual amplitud, longitud de onda y velocidad avanzan en sentido opuesto a través de un medio se forman ondas estacionarias.

La onda estacionaria NO ES una onda viajera, puesto que su ecuación no contiene ningún término de la forma $y=f(x \pm vt)$.

Ondas estacionarias en una cuerda fija en los extremos

Condición de borde → *x=0* , *x=L* cuerda no se desplaza→ *y =0*

$$y(x,t) = (2A\,\mathrm{sen}\,kx)\cos\omega t \qquad y(0,t) = 0$$

$$y(L,t) = 0 \quad \rightarrow \quad kL = n\pi \quad n = 1,2,3\ldots$$

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

$$\downarrow$$

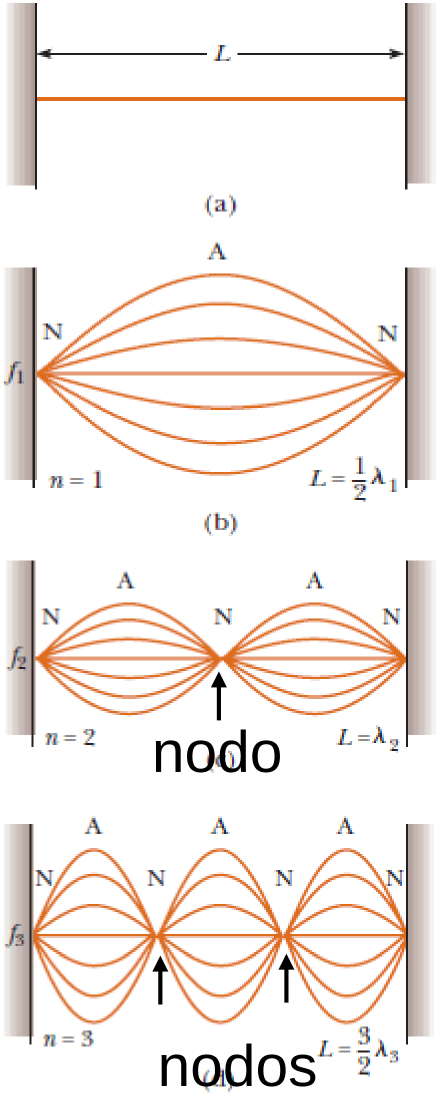
$$\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda_n} L = n\cancel{\pi}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}} \qquad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} v$$

longitud de onda y frecuencia de los modos normales

1° modo, L = ½ λ → $\lambda_1 = 2$ L
(modo fundamental)

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



2° modo, L = λ → $\lambda_2 =$ L

3° modo, L = 3/2 λ → $\lambda_3 = 2/3$ L

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3\ldots}$$

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

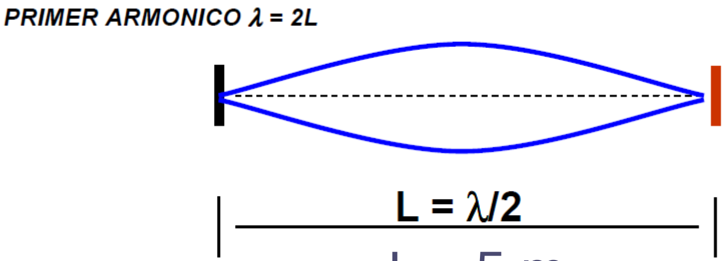
$$\boxed{f_n = n\ f_1}$$

<u>Ejemplo</u>: La velocidad de las ondas transversales en una cuerda tensa es de 200 m/s. Si la cuerda tiene 5 m de largo, hallar la frecuencia fundamental y del segundo armónico

modo fundamental

$\lambda_1 = 2$ L = 10 m

$f_1 = v/\lambda_1$ = 200 (m/s)/10 m = 20 s^{-1}= Hz

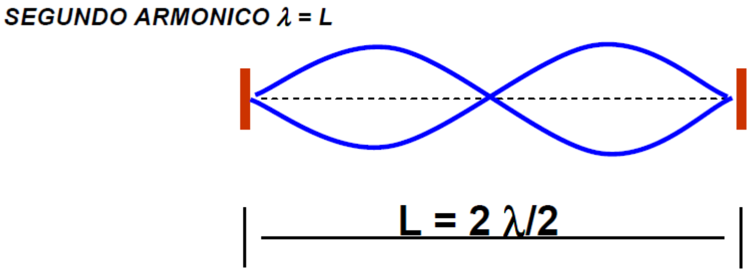


L = 5 m

Segundo armónico

$\lambda_2 =$ L = 5 m

$f_2 = v/\lambda_2$ = 200 (m/s)/5 m = 2 f_1= 40 Hz



Gracias! ☺