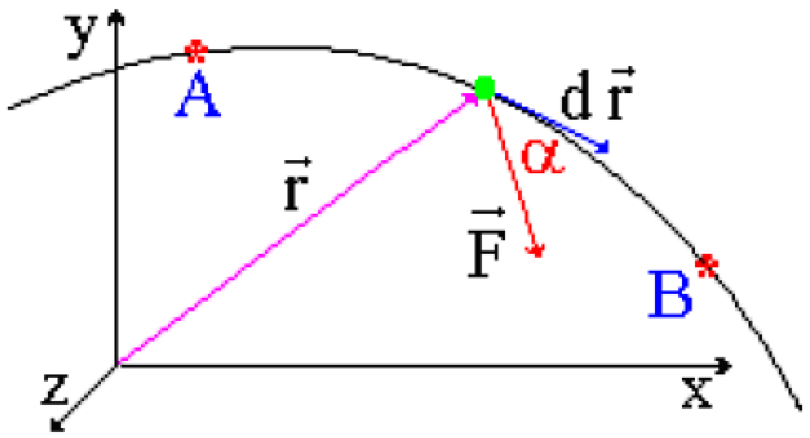
Trabajo mecánico

El trabajo depende de la trayectoria



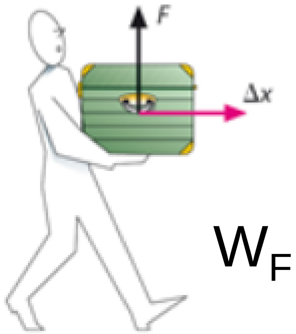
$$W_{A,B} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$W_{A,B} = \int_A^B \underbrace{F\cos\alpha}_{\text{Componente tangencial de la fuerza}} \, ds$$

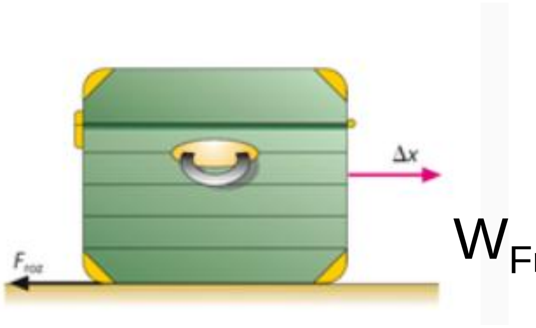
Componente
tangencial de la fuerza

El trabajo es un escalar que puede ser + o -
¡¡¡¡Es muy importante el signo!!!!

W_F (+)



$W_F = 0$



W_{Froz} (-)

Pero si F conservativa

Repaso

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\left[\Phi\,(\vec{r}_b) - \Phi\,(\vec{r}_a)\right]$$

función energía potencial

El trabajo es independiente del camino

Energía potencial gravitatoria (corto alcance)

$$\boxed{\Phi_{gc}(r) = mgy}$$

Cuando una partícula **sube**
gana energía potencial gravitatoria

Energía potencial gravitatoria (largo alcance)

$$\boxed{\Phi_g(r) = -G\frac{mM}{r}}$$

Energía potencial elástica

$$\boxed{\varphi_{el} = \frac{1}{2}kx^2}$$

a mayor deformación
gana energía potencial elástica

Si expresamos la fuerza en componentes cartesianas

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x(xyz)\vec{i} + F_y(xyz)\vec{j} + F_z(xyz)\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$W_{A,B} = \int_A^B F_x(xyz)dx + F_y(xyz)dy + F_z(xyz)dz$$

Ejemplo 1: (similar al problema 19 de la guía)
Una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria en el plano (x y), entre los puntos (0,0) y (2,4), sometida a un campo de fuerzas que en componentes cartesianas viene dado por F = (x+2y)**i** +3xy **j**
Calcular el trabajo realizado por dicho campo de fuerzas cuando
I- la partícula se desplaza a lo largo de la recta que une los puntos
II- Se desplaza en dos tramos rectos de (0,0) y (2,0), y de (2,0) y (2,4),

Repaso

Teorema de las Fuerzas Vivas

$$\boxed{W_{AB} = \Delta T = T_B - T_A}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

energía cinética

trabajo que realiza la resultante de las fuerzas

Energía mecánica del sistema

$$\boxed{E = T + \Phi}$$

$$\boxed{W_{NC}{}^{AB} = E_B - E_A}$$

Teorema de conservación de la energía mecánica:

Si $W_{NC}=0$ $\boxed{E = E_o}$

El principio de conservación de la energía mecánica afirma que, en el caso de objetos que se lanzan hacia arriba y caen…

a) la suma de las Energía cinética y potencial es siempre igual es decir se mantiene constante.
b) la Energía cinética se mantiene constante.
c) la Energía potencial es siempre igual es decir se mantiene constante.

Cuando un cuerpo se lanza hacia arriba, mientras asciende...

a) disminuye su energía cinética
b) disminuye su energía mecánica total.
c) disminuye su energía potencial.
d) mantiene constante su energía mecánica.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa, para trasladar una partícula es independiente:

a) de la fuerza
b) de la trayectoria de la partícula
c) de la propia partícula

La energía cinética

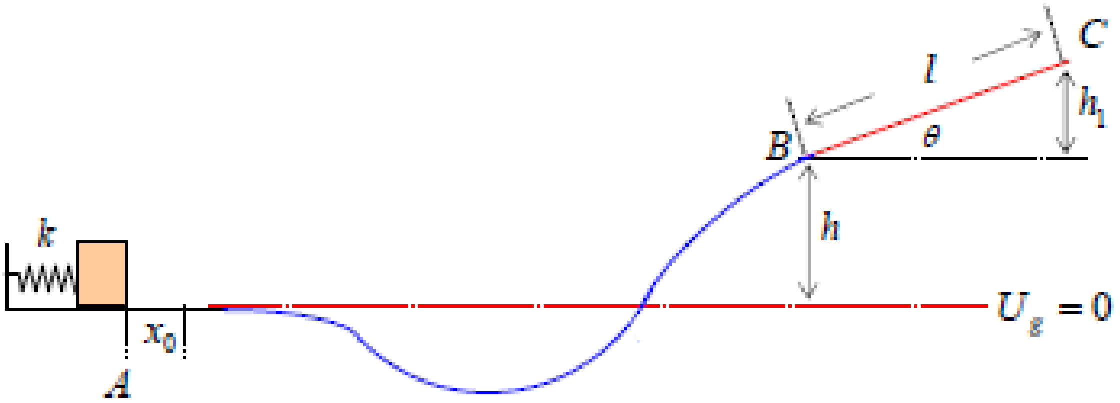
a) siempre es positiva
b) puede llegar a ser negativa en algunos casos
c) solo se toma su valor absoluto sin importar su signo

trabajo total ➡ $W_{AB} = \Delta T = T_B - T_A$ $\quad T = \frac{1}{2} m v^2$

trabajo de las fuerzas NO conservativas ➡ $W_{NC}^{AB} = E_B - E_A$ $\quad E = T + \Phi$

Ejemplo 2

Un bloque de masa m = 1 kg comprime a un resorte de constante k = 196 N/m una distancia x_0 = 0.38 m . Cuando se suelta el bloque, se desliza a lo largo de una vía *AB*, con roce despreciable. El tramo *BC* es un plano inclinado un ángulo θ = 20º, con coeficiente de fricción dinámico 0.6 y estático 0.7. El punto *B* se encuentra a una altura *h* =1.1*m* sobre la línea punteada horizontal.



a) La velocidad en B.
b) La distancia *l* que recorre el bloque en el camino con roce *BC* hasta que se detiene en *C.*
c) El trabajo realizado por cada fuerza al ir desde A a C.
d) ¿Luego de llegar a C, el bloque desciende?

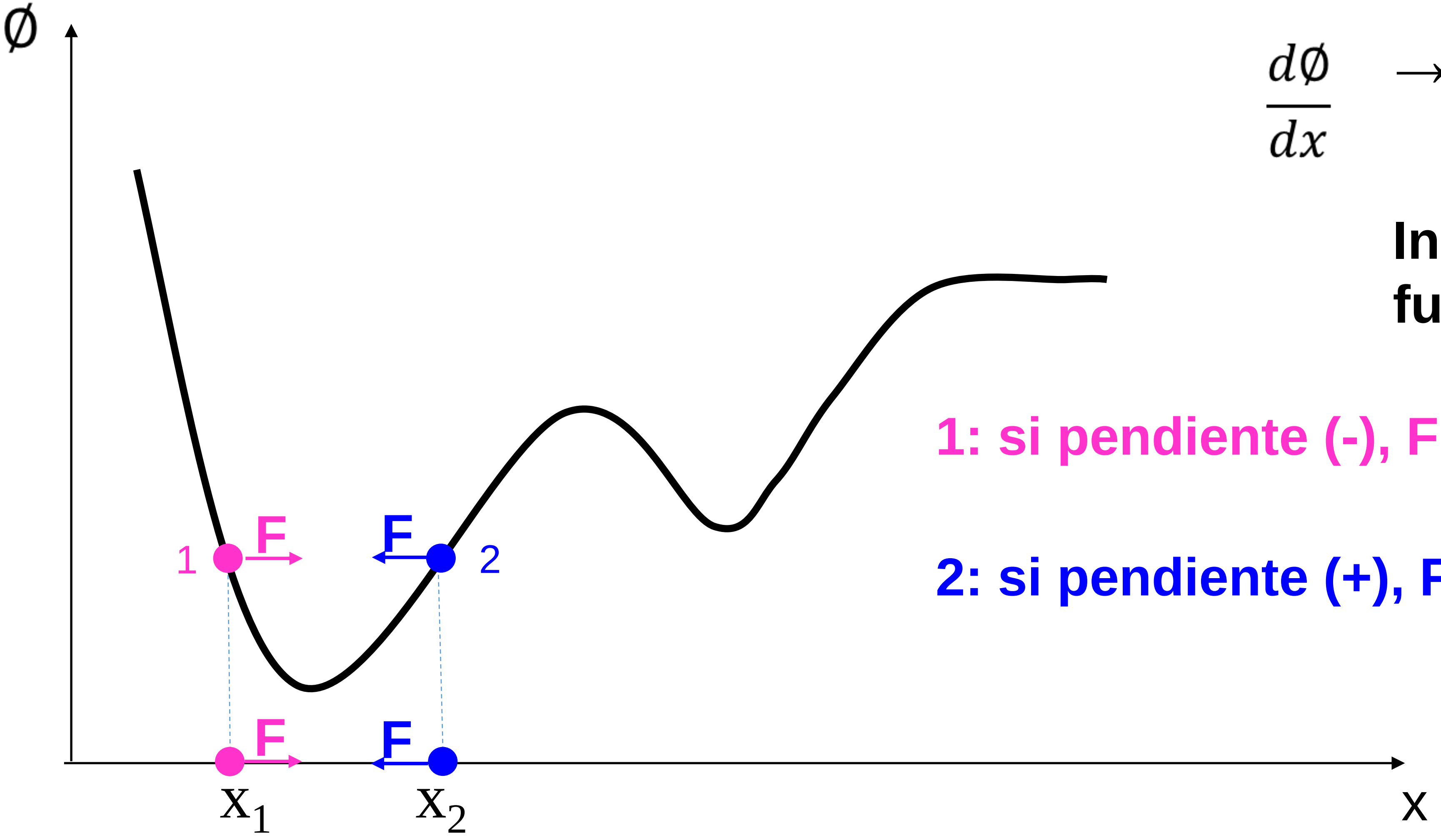
Sobre esta temática son los problemas hasta el 24

Campo conservativo unidimensional

$$\vec{F} = -\frac{\partial \emptyset}{\partial x}\vec{i} = -\frac{d\emptyset}{dx}\vec{i}$$

$\frac{d\emptyset}{dx}$ → **pendiente**

Info sobre la fuerza en el punto



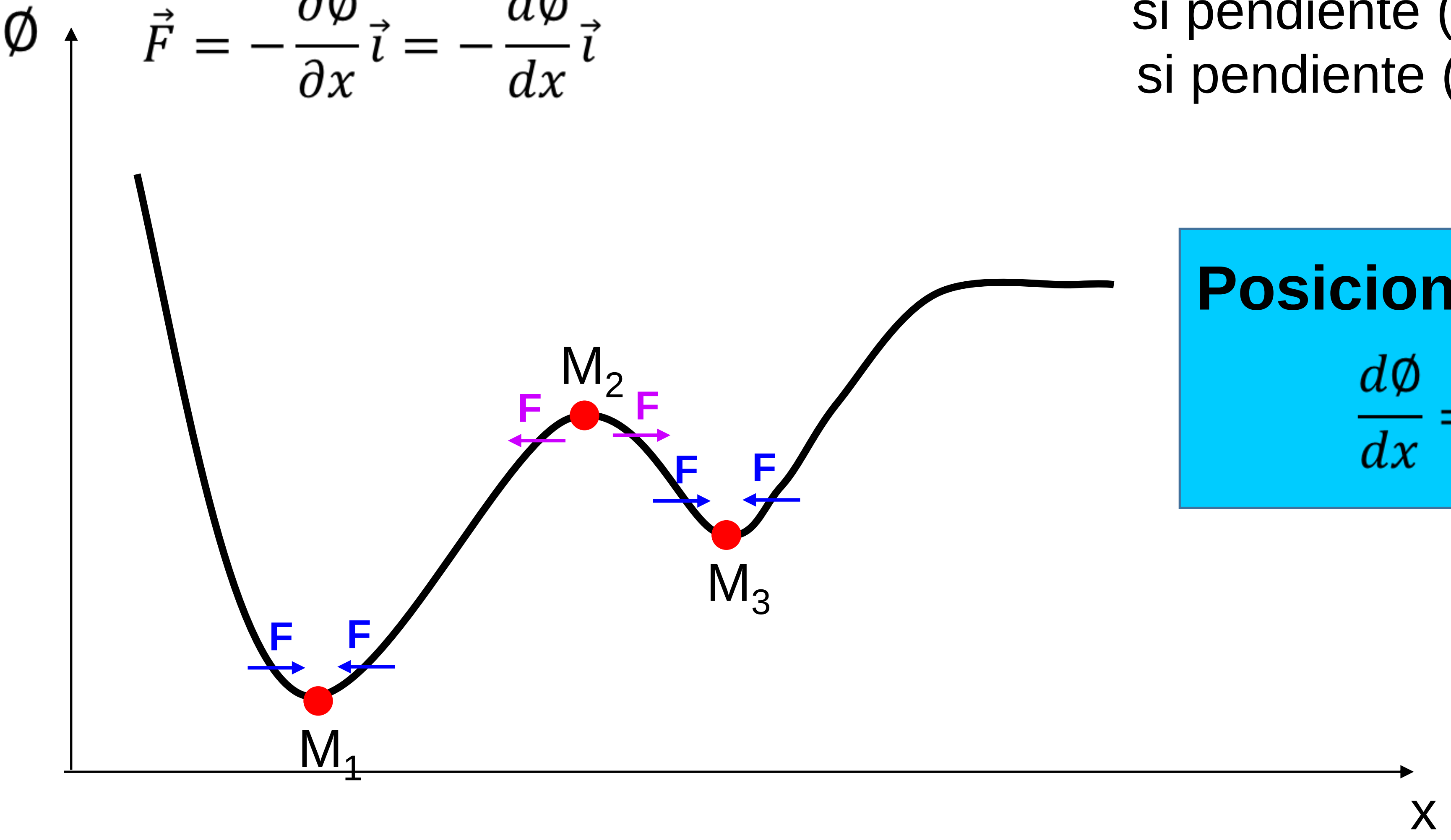
1: si pendiente (-), F en la dirección (+)

2: si pendiente (+), F en la dirección (-)

OJO: recordar que las partículas se mueven en el eje x

$$\vec{F} = -\frac{\partial \emptyset}{\partial x}\vec{i} = -\frac{d\emptyset}{dx}\vec{i}$$

si pendiente (-), **F** en la dirección (+)
si pendiente (+), **F** en la dirección (-)



Posiciones de equilibrio

$$\frac{d\emptyset}{dx} = 0 \rightarrow F = 0$$

M_1 M_3 Posiciones de **equilibrio ESTABLE**

M_2 Posición de **equilibrio INESTABLE**

Consideremos una partícula en un **campo de fuerzas conservativo** asociado a $\phi(x)$, con lo cual la energía mecánica permanece constante (caso unidimensional)

$T + \phi(x) = E$ **es constante**

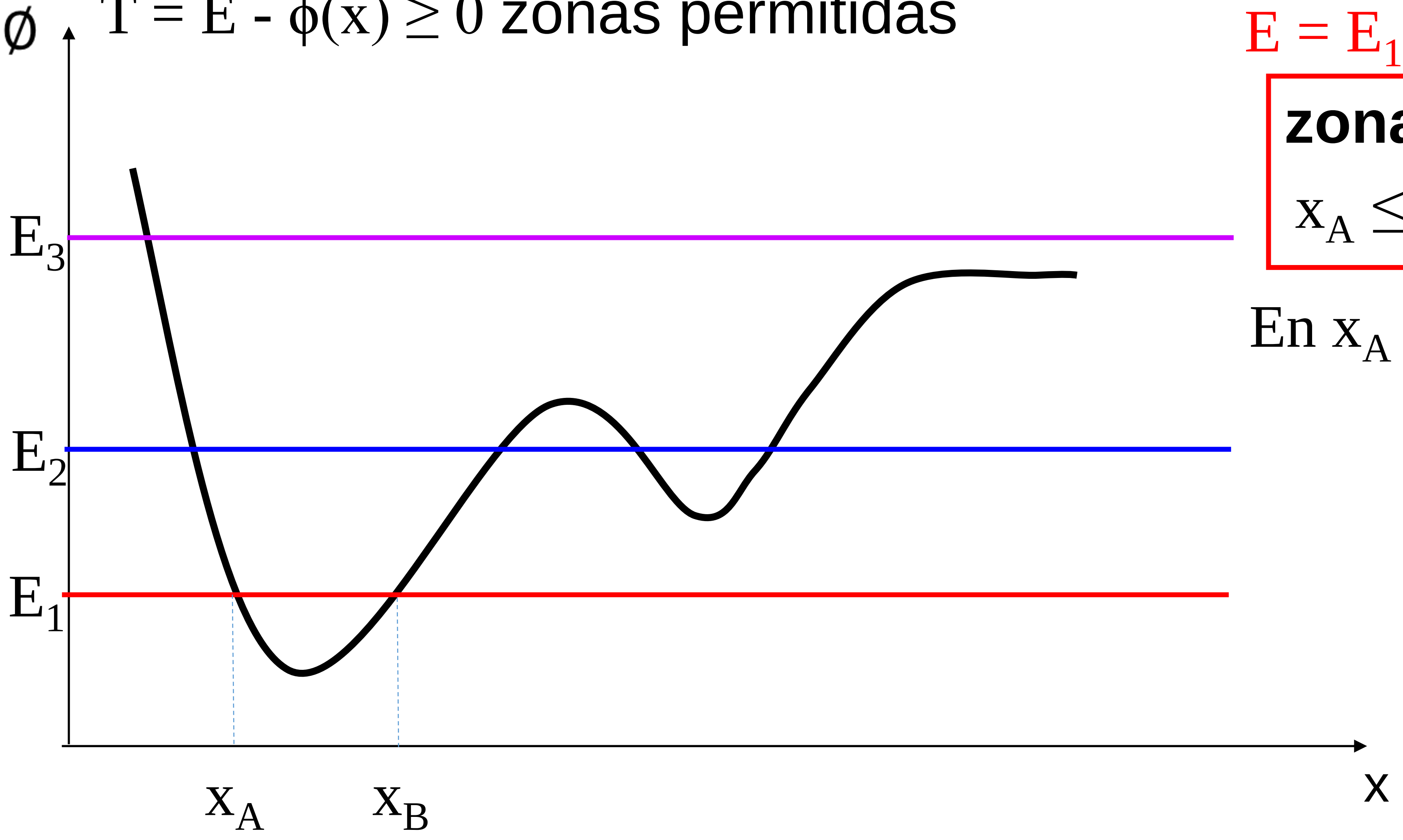
$T = E - \phi(x) \geq 0$ **ya que la energía cinética siempre es positiva**

$E \geq \phi(x)$ **Zonas clásicamente permitidas**

la partícula solo podrá encontrarse en posiciones tales que cumplan con esa desigualdad

$E < \phi(x)$ **Zonas clásicamente prohibidas**

$T = E - \phi(x) \geq 0$ zonas permitidas



$E = E_1$

$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{zonas permitidas} \\ x_A \leq x \leq x_B\end{array}}$

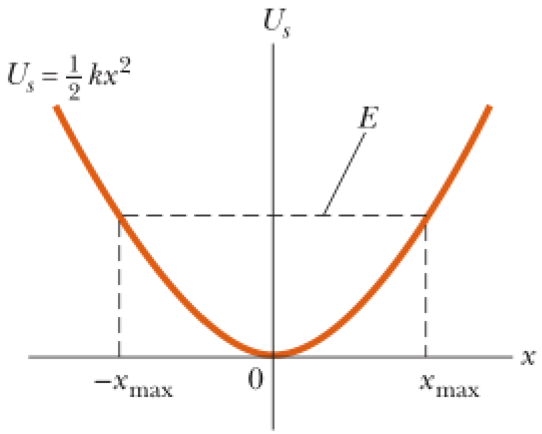
En x_A y x_B $E = \phi \rightarrow T = 0$

$T = 0 \rightarrow v = 0$

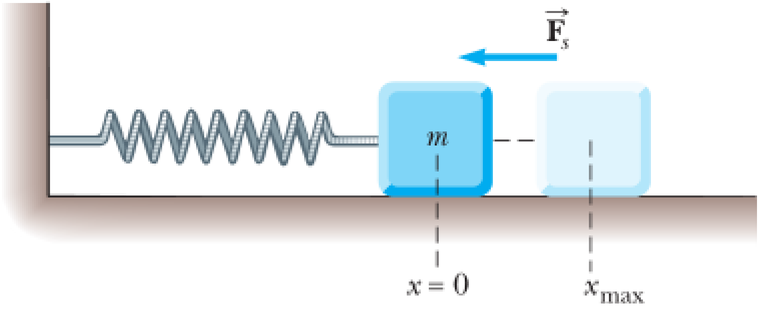
puntos de retorno

$E = E_2 \rightarrow$ **dos regiones posibles de movimiento**

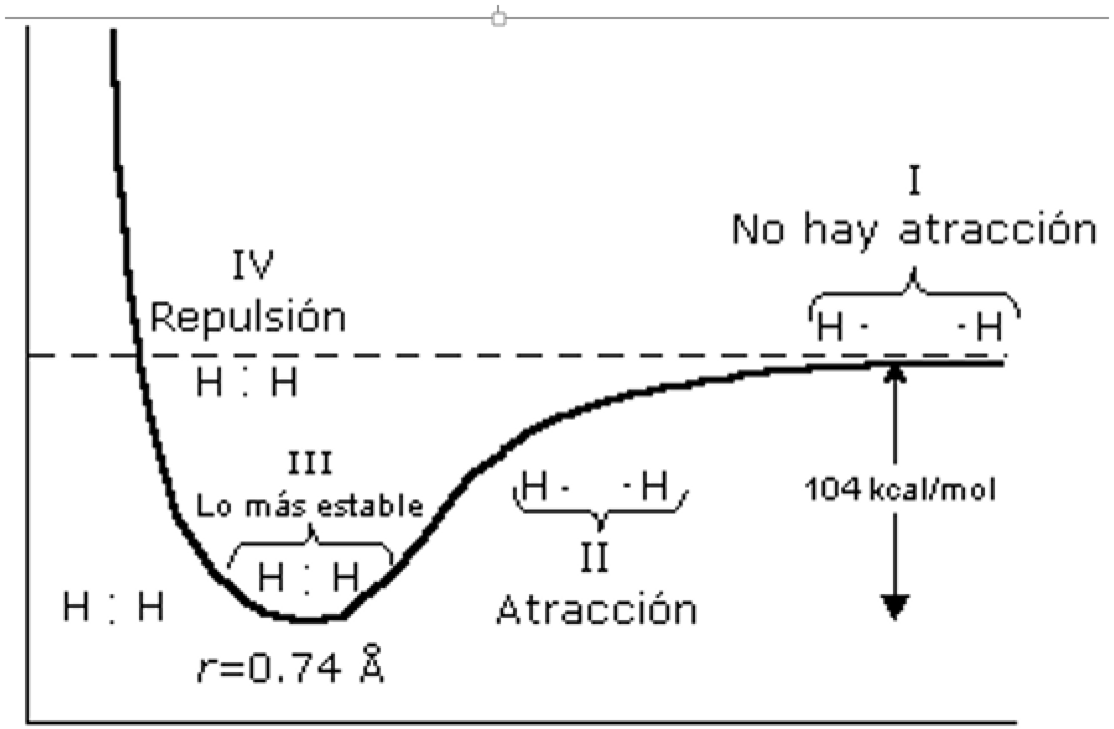
Masa acoplada a un resorte (relacionar con problema 27)



(a)



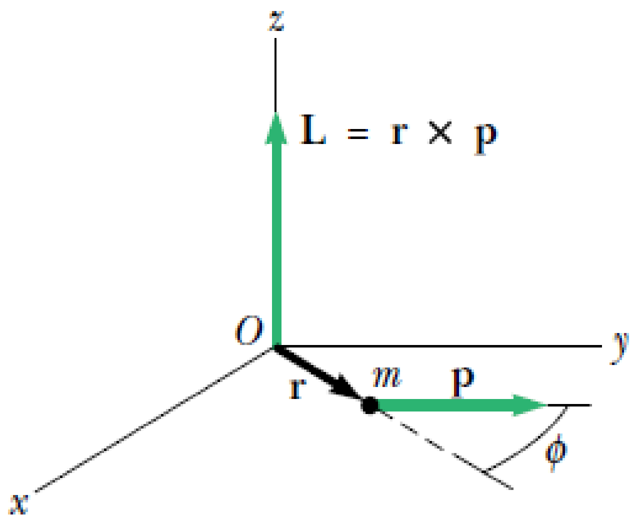
Energía potencial para una molécula diatómica



distancia entre núcleos

Sobre esta temática son los problemas del 25 al 27

Momento angular respecto al origen de un SRI



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

L es perpendicular a r y a v

Si movimiento plano (xy) → L perpendicular al plano de movimiento (en k)

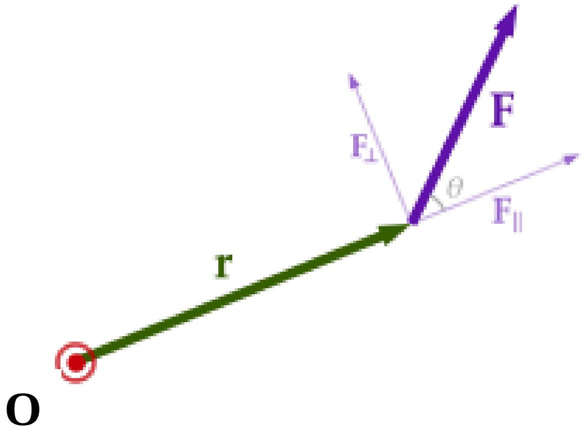
magnitud de L

$$L = m\,r\,v_{\theta} \qquad L = m\,r^2\,\dot{\theta}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

momento que genera la resultante de las fuerzas respecto del origen del SRI

Momento o torque (respecto de O)



$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M} = r\, \underbrace{F sen\theta}\, \mathbf{k}$$

$F_{\perp} \rightarrow$ **componente de F perpendicular a r**

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

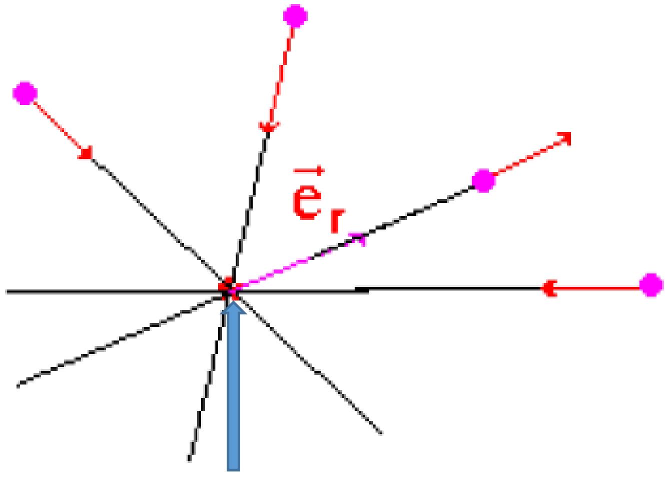
momento que genera la resultante de las fuerzas respecto del origen del SRI

Si el conjunto de fuerzas es tal que no generan momento respecto de un punto fijo a un sistema inercial, entonces el momento angular, calculado respecto de dicho punto, permanecerá constante

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = cte \quad \therefore \quad \vec{L} = \vec{L}_o \qquad m\, r^2\, \dot{\theta} = L_o$$

Trayectoria Plana

Fuerzas centrales



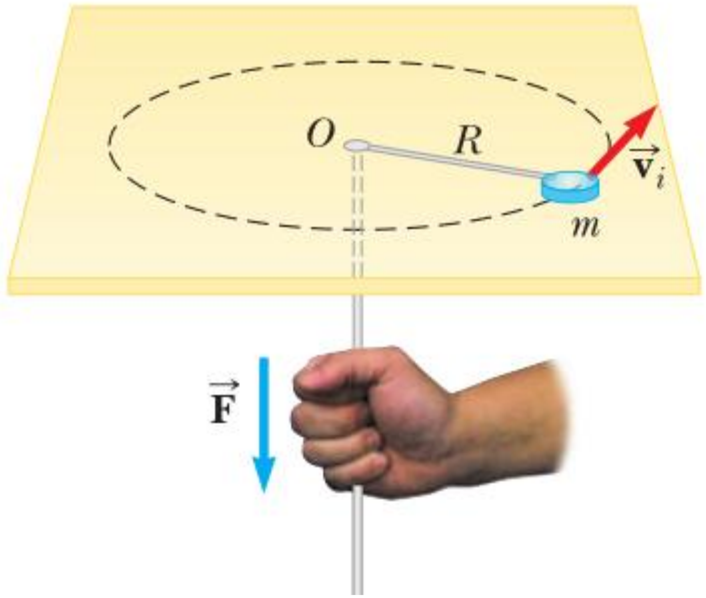
centro de fuerzas

Una partícula esta sometida a un campo de fuerzas central cuando la dirección de dicha fuerza pasa siempre por un punto fijo

Cuando la fuerza es central el momento angular con respecto al centro de fuerzas es constante y la partícula se desplazará a lo largo de una trayectoria plana.

Ejemplo 3:

Una partícula de masa m se mueve con velocidad v_i en un círculo de radio R sobre una mesa sin rozamiento. La partícula está atada a una cuerda que pasa por un agujero de la mesa. Tirando de la cuerda lentamente hacia abajo la partícula se mueve en una circunferencia de radio menor r. Determinar la velocidad final de la partícula.



Para una partícula que está sometida a un campo de fuerzas central, si la energía potencial depende solo de r $\Phi = \Phi(r)$

$$T + \Phi(r) = E_\circ$$

La energía mecánica permanece constante

Trayectoria plana, expreso a la velocidad en polares

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \Phi(r) = E_\circ$$

Por conservación de L $\rightarrow$ $\boxed{\dot{\theta} = \frac{L_\circ}{mr^2}}$ **(1)**

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_\circ - \left[\Phi(r) + \frac{L_\circ^2}{2mr^2}\right]$$

energía potencial ficticia

$$\boxed{\Phi^*(r) = \Phi(r) + \frac{L_\circ^2}{2mr^2}}$$ **(2)**

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_\circ - \Phi^*(r)$$ **(3)**

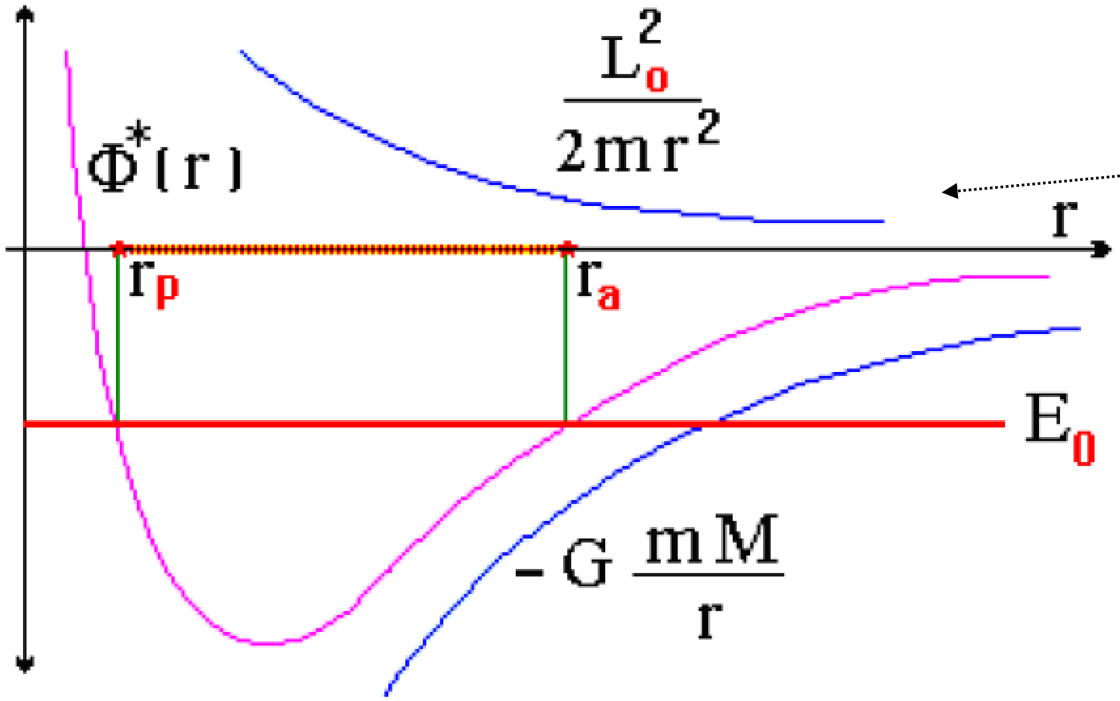
(3) $$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_\circ - \Phi^*(r)$$ **comportamiento en** r

(1) $$\dot{\theta} = \frac{L_\circ}{mr^2}$$ **comportamiento en** θ

A partir de (3) vemos que las zonas permitidas para la partícula corresponden a los valores de r tales que $\phi^*(r) \leq E_0$

Para el caso del campo gravitatorio

$$\Phi^*(r) = \Phi(r) + \frac{L_o^2}{2mr^2}$$

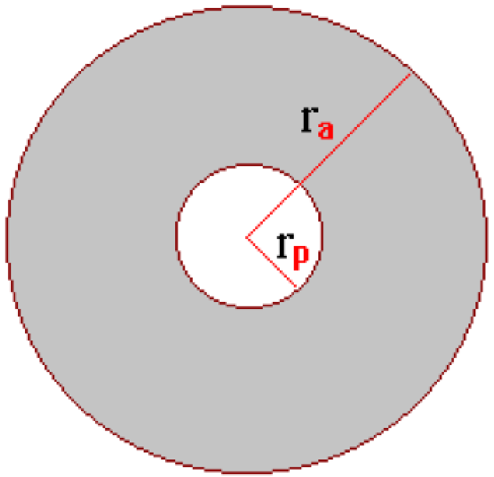


Domina a pequeñas distancias

Para esta energía las zonas permitidas son

$r_p \leq r \leq r_a$ **(zona permitida acotada)**

¿Esto que significa?

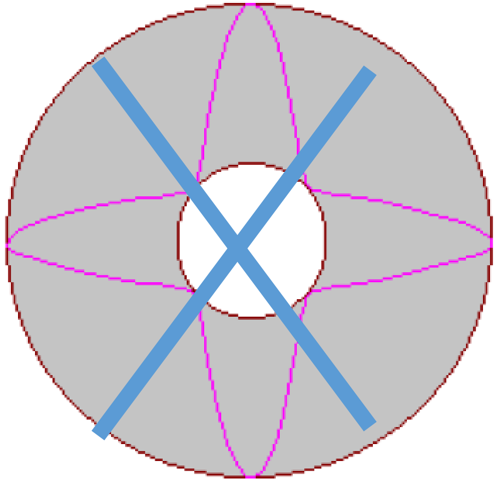


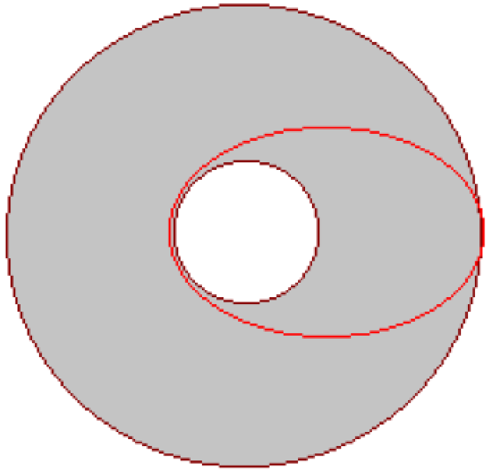
zona permitida $r_p \leq r \leq r_a$

OJO: este análisis no nos proporciona información sobre la forma de la trayectoria a lo largo de la que se desplazará la partícula

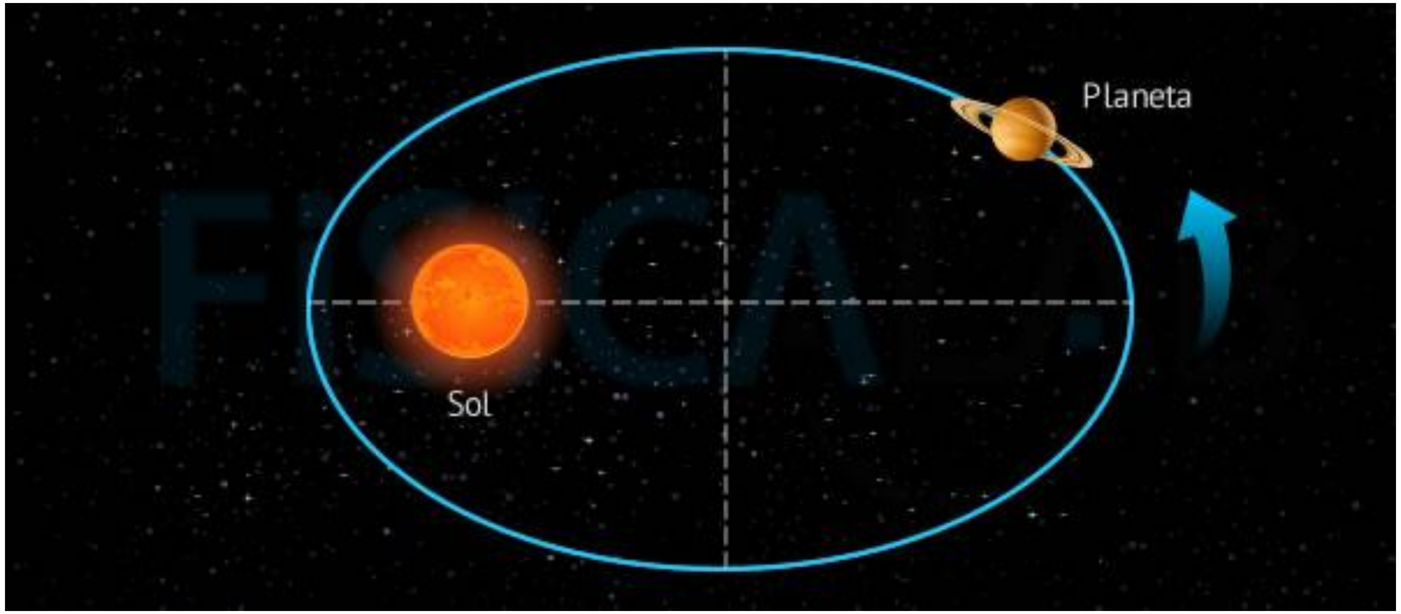
Resolviendo la ecuación radial de ley de Newton, es posible demostrar que la trayectoria a lo largo de la que se desplazará la partícula será una elipse con foco en el centro de fuerzas

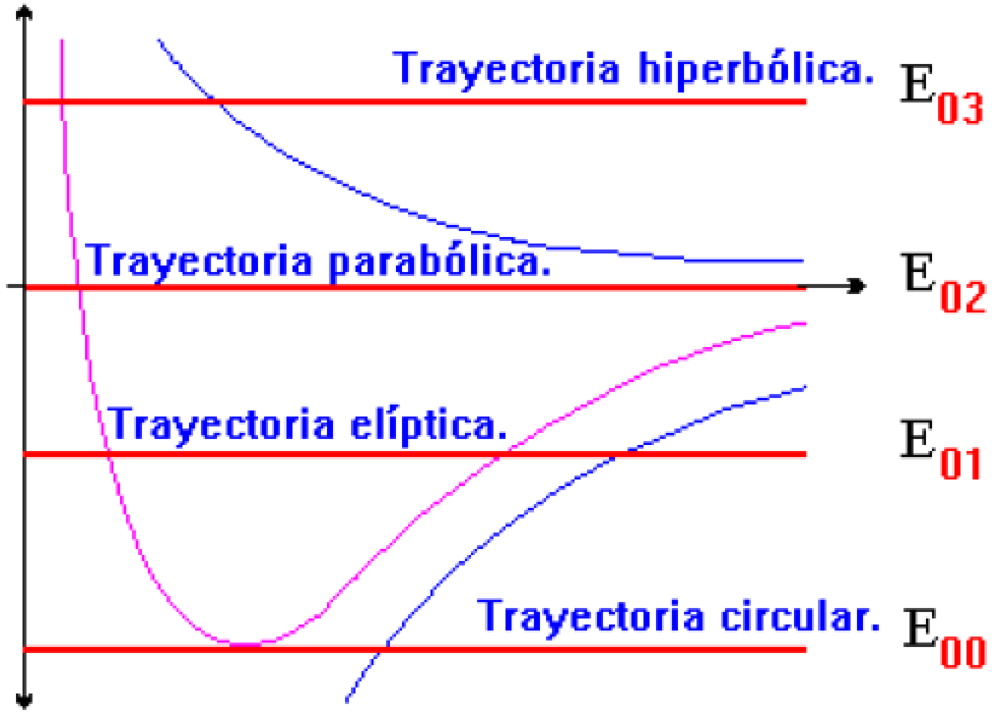
podría seguir una trayectoria como esta?

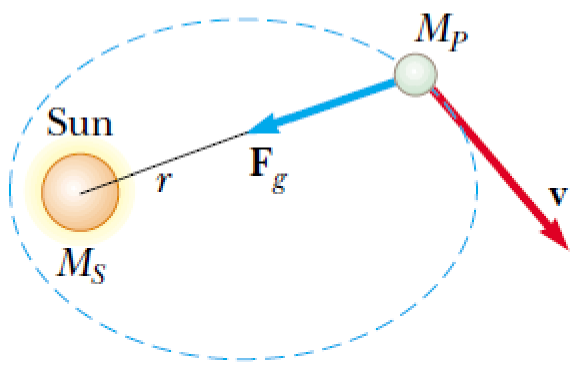




Primera Ley de Kepler: Todos los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas. El Sol está en uno de los focos de la elipse.

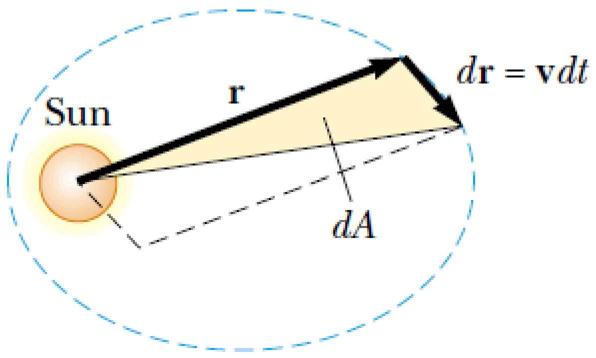



Trayectoria hiperbólica.
E_{03}
Trayectoria parabólica.
E_{02}
Trayectoria elíptica.
E_{01}
Trayectoria circular.
E_{00}



Consideremos un cuerpo de masa M_P que sigue una orbita elíptica alrededor del sol. Como la fuerza gravitatoria es central, el torque es cero y se conserva el momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = M_P \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{constant}$$

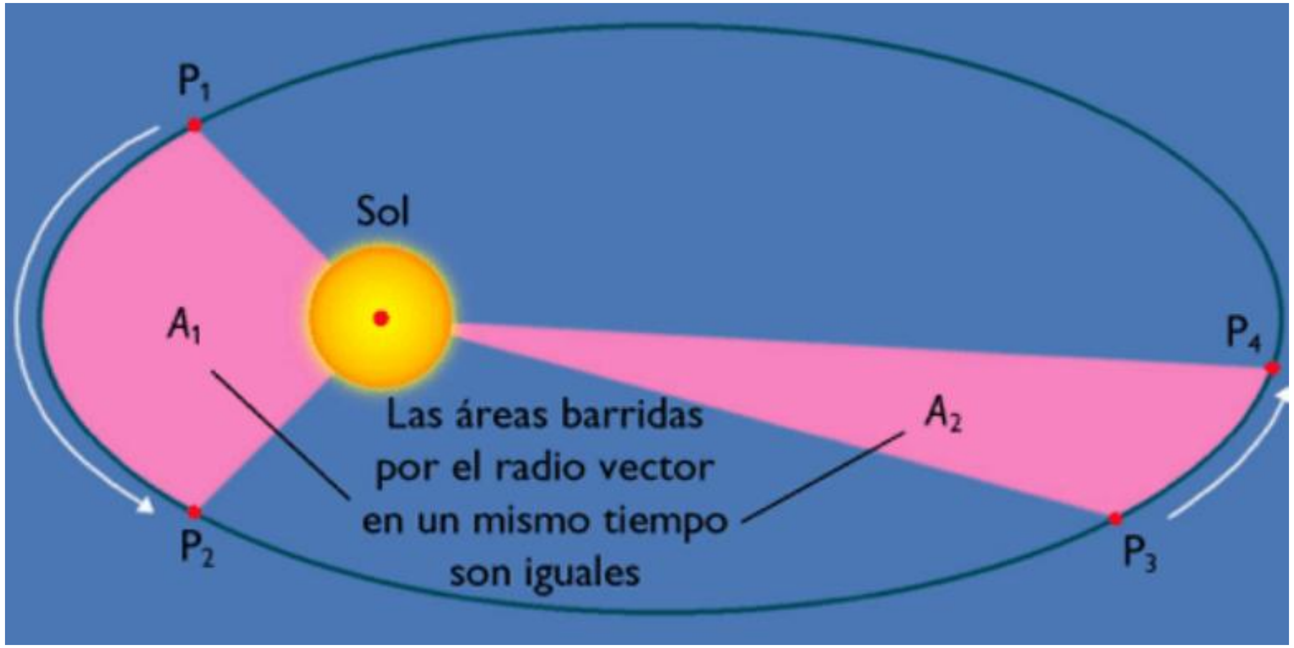


Durante un tiempo o *dt*, el radio vector barre un área *dA*

$$dA = \tfrac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \tfrac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dt| = \frac{L}{2M_P}\, dt$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_P} = \text{constant}}$$

Segunda Ley de Kepler: El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales



$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_P} = \text{constant}$$

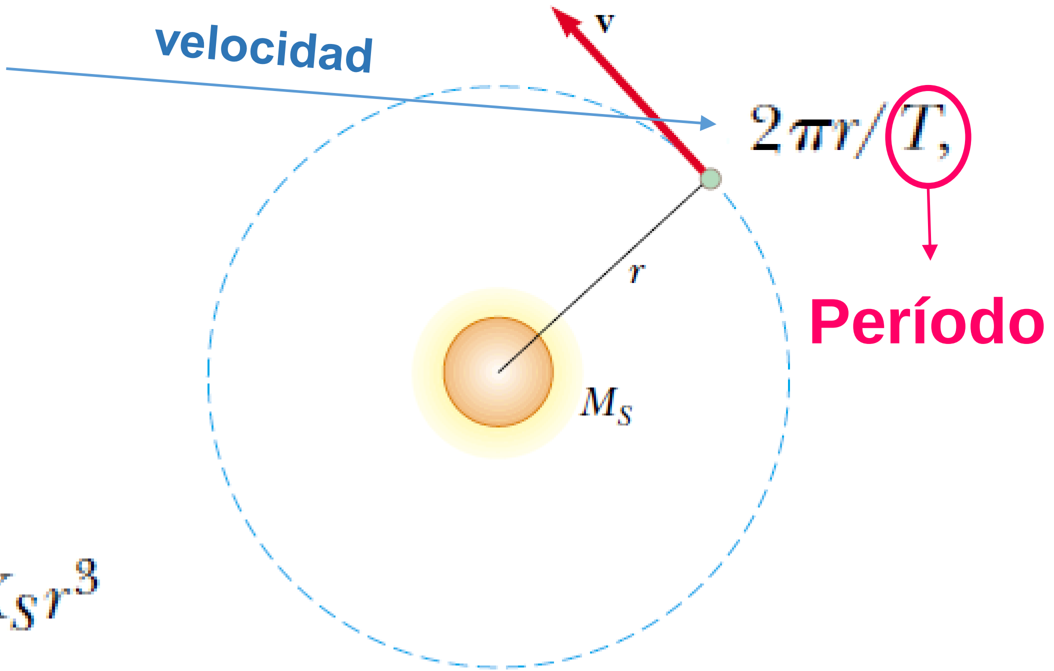
El planeta debe moverse mas lentamente cuando esta mas alejado del Sol, y mas rápidamente cuando esta mas cercano a el.

Si el planeta se mueve en una orbita circular

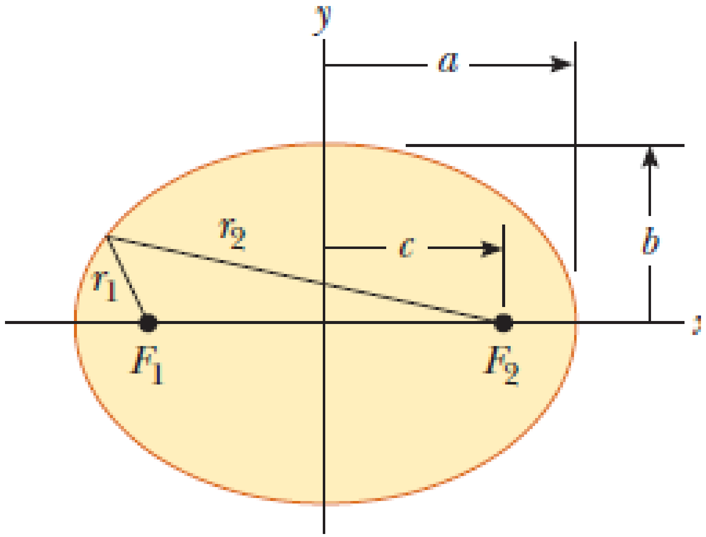
$$\frac{GM_S M_P}{r^2} = \frac{M_P v^2}{r}$$

$$\frac{GM_S}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) r^3 = K_S r^3$$



Para una orbita elíptica se puede demostrar que



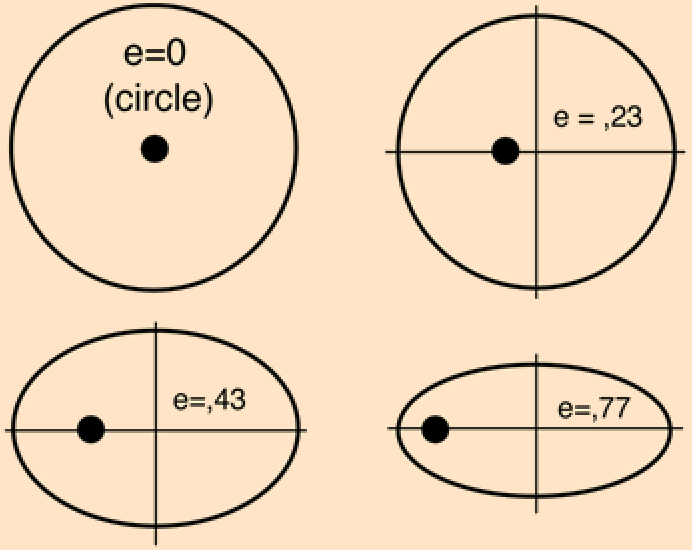
$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) a^3 = K_S a^3$$

$a = r$ para una orbita circular

Tercera Ley de Kepler: El cuadrado del periodo de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su orbita. Esta ley también se conoce como la ley de los periodos.

c/a = *excentricidad* de la orbita.
Salvo Marte, Mercurio y Plutón, la mayoría de las orbitas planetarias son casi circulares y tienen una excentricidad que se aproxima a 0.

Ejemplos de Excentricidad de Elipses



Excentricidad Órbitas Planetarias

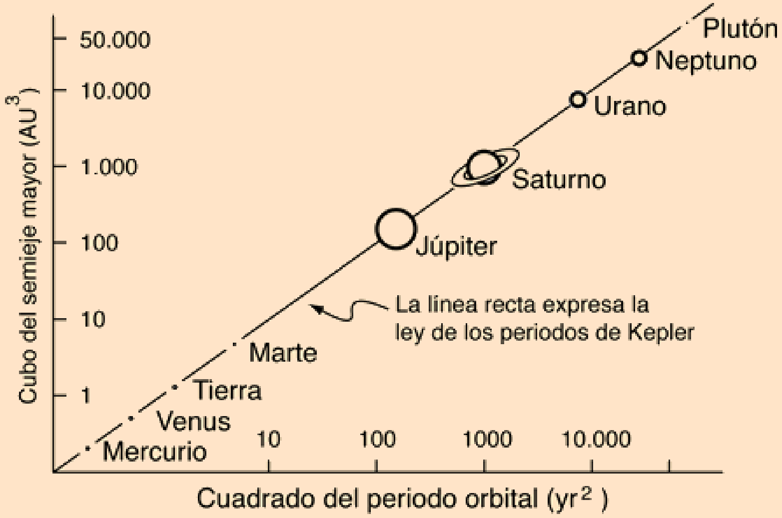
Mercurio	,206
Venus	,0068
Tierra	,0167
Marte	,0934
Júpiter	,0485
Saturno	,0556
Urano	,0472
Neptuno	,0086
Plutón	,25

La Ley de los Periodos

El cuadrado del periodo de cualquier planeta, es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Esta es una de las leyes de Kepler. Esta ley surge de la ley de la gravitación. Newton formuló primero la ley de la gravitación a partir de la tercera ley de Kepler.



$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

se puede expresar simplemente como

$$T^2 = a^3$$

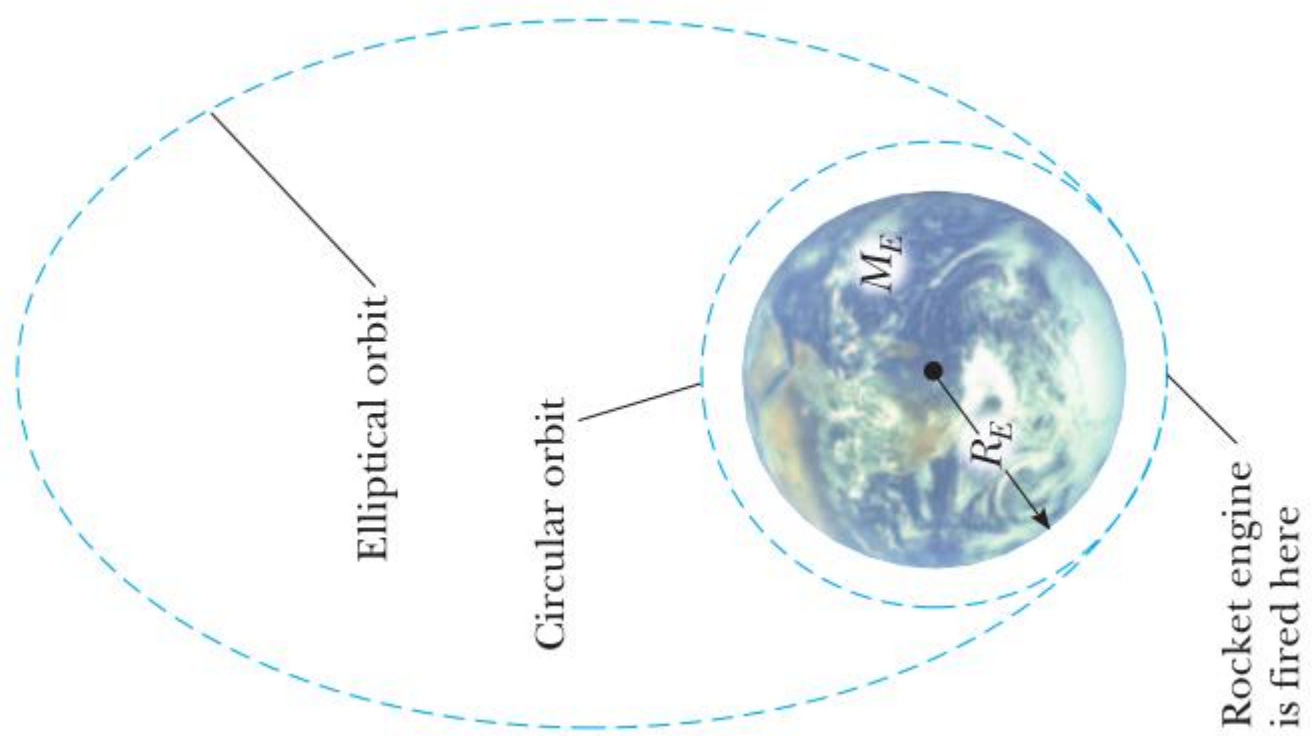
Si se expresa en las siguientes unidades:

- T Años terrestres
- a Unidades astronómicas UA (a = 1UA para la Tierra)
- M Masas solares $M_\odot$

Entonces $\frac{4\pi^2}{G} = 1$

Ejemplo 3

Un satélite artificial describe una trayectoria circular de radio r_0 alrededor de la tierra. ¿Cuál debe ser el cambio en su energía cinética para que pase a describir una órbita elíptica cuya apogeo es $2r_0$?



Sobre esta temática son los problemas del 27 al 31

EN EL PARCIAL ENTRA HASTA EL PROBLEMA 31