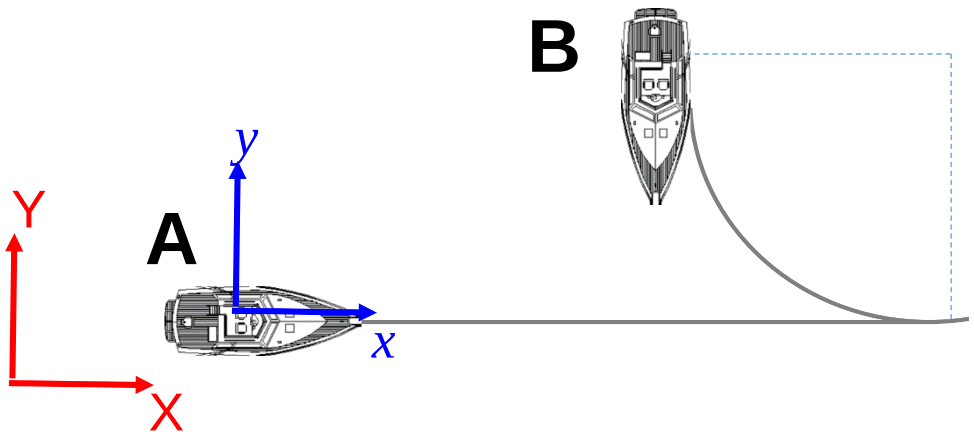
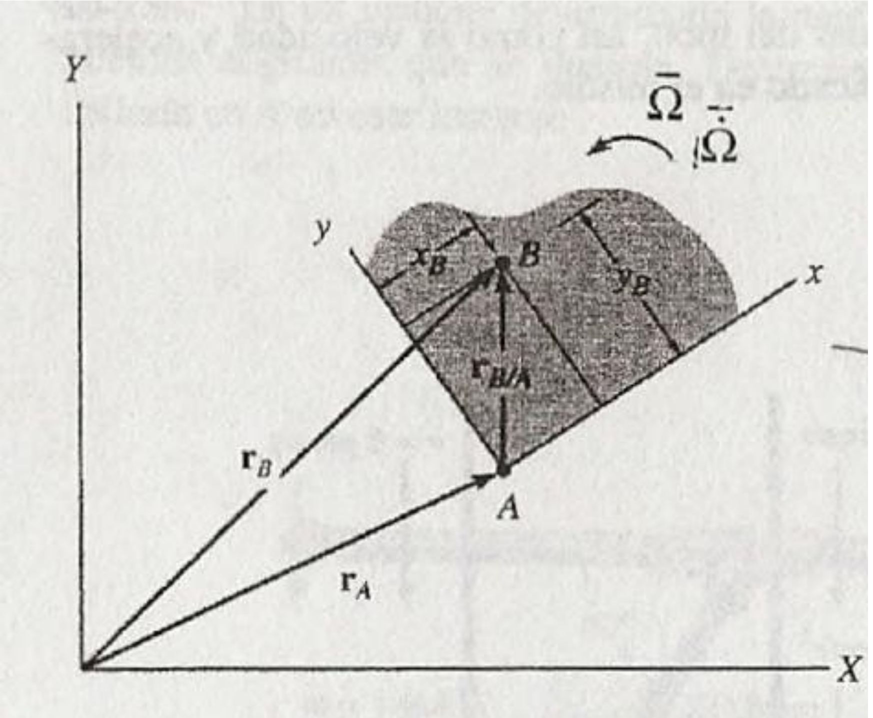
Sistemas de Referencia con traslación relativa

Ejemplo 1

Dos barcos A y B están en un instante en las posiciones que se indican. El barco B se desplaza con una rapidez constante de 8 m/s recorriendo un arco de circunferencia de 3200 m de radio. El barco A tiene en ese instante una velocidad de 4 m/s siguiendo una trayectoria rectilínea y reduce su velocidad a razón constante de 0.01 m/s^2, para evitar el riesgo de colisión. Determinar la velocidad y aceleración que parece tener B para un observador situado en A



Sistemas de Referencia con traslación y rotación relativa



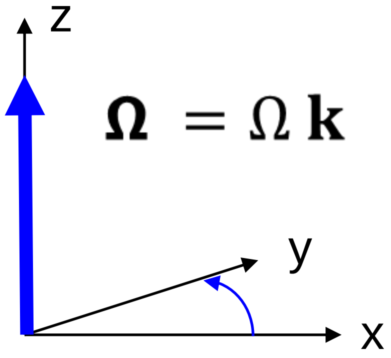
XYZ→ **sistema de referencia fijo**

xyz

- **Rotación y traslación** **respecto a XY**
- **Origen en A**

$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \quad (1)$$



$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\mathbf{k}$$

vector velocidad angular
del SR xyz respecto a XYZ

xy plano de movimiento

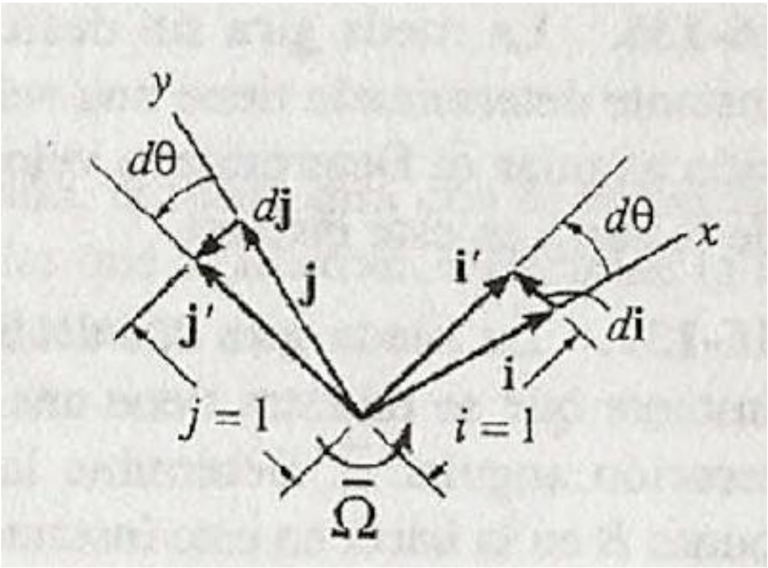
$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$ (1) derivo (1) con respecto al tiempo

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d}{dt}(x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) = \frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j}\right)}_{(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}} + \left(x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right) \quad (3)$$

hay que evaluar la variación de c/versor cuando el SR xy rota



$\mathbf{i}' = \mathbf{i} + d\mathbf{i}$

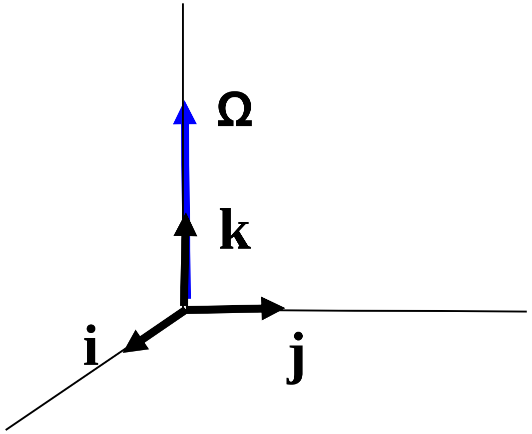
$$\left.\begin{array}{l} |\, d\,\mathbf{i} \,| = |\, \mathbf{i} \,|\, d\theta = d\theta \\ \text{dirección de } \; d\,\mathbf{i} \;\rightarrow \mathbf{j} \end{array}\right\} \quad d\,\mathbf{i} = d\theta\, \mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\mathbf{j}) = \Omega\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\mathbf{i}) = -\Omega\mathbf{i}$$

que me daría $\bar{\Omega} \times \mathbf{i}$?

$$\bar{\Omega} \times \mathbf{i} = \frac{d\mathbf{i}}{dt} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \bar{\Omega} \times \mathbf{j} \qquad (4)$$



Sustituyo en (3)

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \bar{\Omega} \times (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \bar{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad (5)$$

Reemplazo (5) en (2)

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} \qquad (2)$$

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}} \qquad (6)$$

otra notación

$$\vec{v}_{XYZ} = \vec{v}_{xyz} + \vec{V}_{XYZ} + \vec{w} \times \vec{r}$$

$\mathbf{v}_B$ = velocidad de B, medida a partir de la referencia X, Y, Z — $\vec{v}_{XYZ}$

$\mathbf{v}_A$ = velocidad del origen de A en la referencia x, y, z, medida a partir de la referencia X, Y, Z — $\vec{V}_{XYZ}$

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = velocidad relativa de "B con respecto de A", según la mediría un observador sobre el eje de referencia en *rotación* x, y, z. — $\vec{v}_{xyz}$

Ω = velocidad angular de la referencia x, y, z, medida a partir de la referencia X, Y, Z — $\vec{w}$

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición relativa de "B con respecto de A"

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}} \qquad (6) \qquad \vec{v}_{XYZ} = \vec{v}_{xyz} + \vec{V}_{XYZ} + \vec{w} \times \vec{r}$$

$\mathbf{v}_B$ $\{$velocidad absoluta de B

(igual a)

$\mathbf{v}_A$ $\left\{\begin{array}{l}\text{velocidad absoluta de origen}\\ \text{del marco } x, y, z\end{array}\right.$

(más)

$\bar{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{efecto de la velocidad angular pro-}\\ \text{vocado por el giro del marco } x, y, z\end{array}\right.$

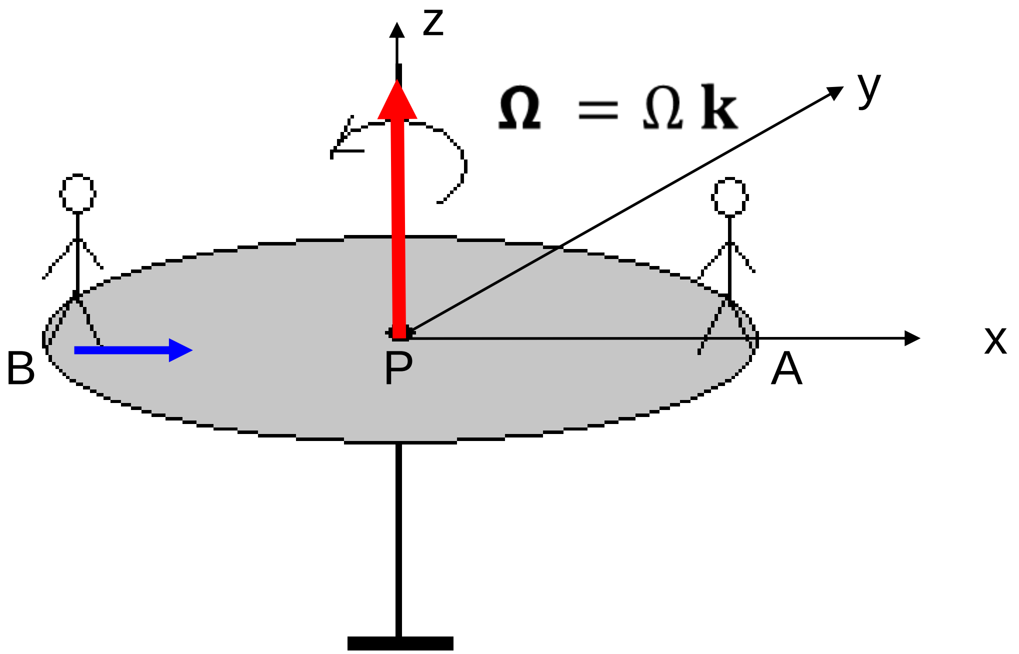
$\Big\}$ movimiento del marco x, y, z observado desde el marco X, Y, Z

(más)

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ $\{$velocidad relativa a B respecto a A $\}$ movimiento de B observado desde el marco x, y, z

Ejemplo 2

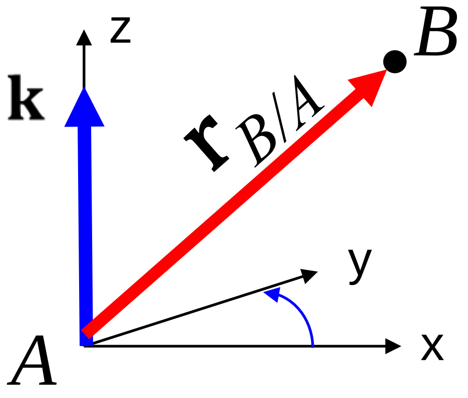
Dos niños están sobre una plataforma circular que gira como indica la figura. Si en ese instante A no se desplaza respecto de la plataforma, mientras que B se dirige hacia el centro P con una velocidad v_0 relativa a la plataforma, Hallar la velocidad absoluta de cada niño



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\mathbf{k}$$



Origen del SR xyz

Para hallar la aceleración de B, hay derivar (6)

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \bar{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\bar{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \bar{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} \quad (7)$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\bar{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \bar{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} \tag{7}$$

uso (5)

$$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \bar{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\bar{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \bar{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

$$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (v_{B/A})_x \mathbf{i} + (v_{B/A})_y \mathbf{j}$$

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \underbrace{\left[\frac{d(v_{B/A})_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(v_{B/A})_y}{dt}\mathbf{j}\right]}_{(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}} + \left[(v_{B/A})_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + (v_{B/A})_y \frac{d\mathbf{j}}{dt}\right]$$

uso (4)

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \bar{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \bar{\Omega} \times \mathbf{j}$$

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \bar{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\,\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}}$$

$\mathbf{a}_B$ = aceleración de B, medida desde el marco de referencia X, Y, Z

$\mathbf{a}_A$ = aceleración del origen A de la referencia x, y, z, medida desde la referencia X, Y, Z

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = aceleración y velocidad relativas de "B con respecto de A", de acuerdo con las mediciones de un observador unido al eje en *rotación* x, y, z

$\dot{\Omega}$, $\bar{\Omega}$ = aceleración y velocidad angulares de la referencia x, y, z, medidas desde la referencia X, Y, Z

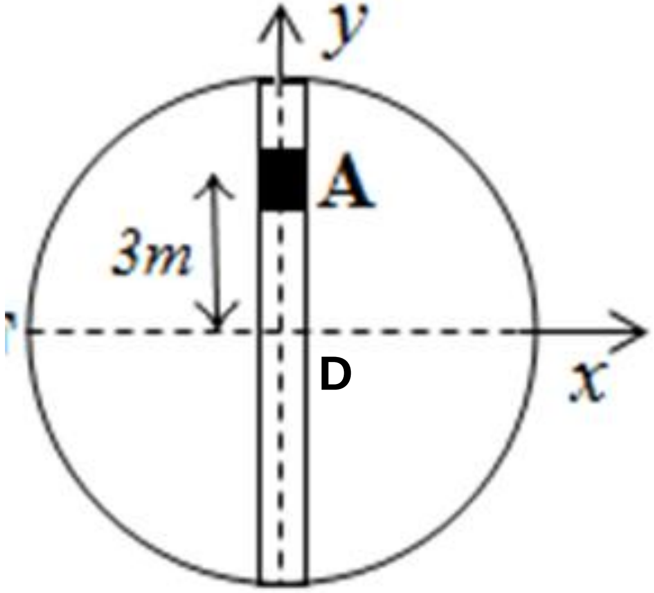
otra notación $$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz} + \vec{A}_{XYZ} + \vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r} + 2\vec{w} \times \vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{w}} \times \vec{r}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\,\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

$\mathbf{a}_B$	{aceleración absoluta de B	
	(igual a)	
$\mathbf{a}_A$	{aceleración absoluta de origen del marco x, y, z	movimiento del marco x, y, z observado desde el marco X, Y, Z
	(más)	
$(\dot{\bar{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A})$	{efecto de aceleración absoluta provocado por el giro del marco x, y, z	
	(más)	
$\bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$	{efecto de velocidad angular provocado por el giro del marco x, y, z	
	(más)	
$2\bar{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$	{efecto combinado de B en movimiento en relación con las coordenadas x, y, z y rotación del marco x, y, z	movimiento interactivo
	(más)	
$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$	{aceleración relativa de B respecto a A	movimiento de B observado desde el marco x, y, z

Ejemplo 3

En el instante considerado el disco con la ranura radial gira con una velocidad angular de 2 rad/s y aceleración angular de 0.995 rad/s², ambas antihorarias. La corredera A se mueve hacia abajo con una velocidad relativa al disco constante de 1m/s.



Hallar la velocidad y aceleración absolutas de A

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\,\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

Pueden terminar la guía de cinemática

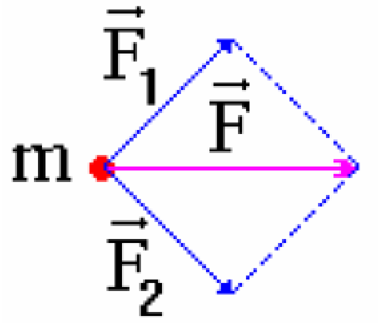
Dinámica

interacciones → fuerzas

- de contacto
- campos de fuerzas

Primera ley de Newton (principio de inercia)

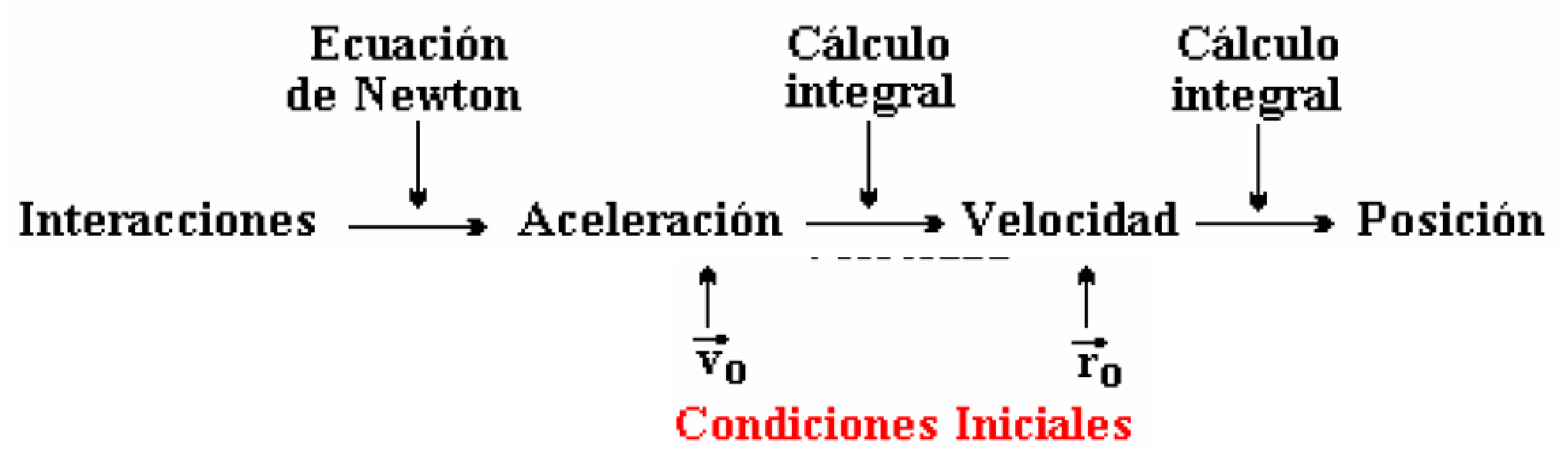
¨Un cuerpo libre de interacciones conservará su estado de movimiento” y por lo tanto se desplazará con una velocidad constante a lo largo de una trayectoria recta, o si estaba en reposo, continuará en dicho estado.



$$\boxed{\vec{F} = \sum \vec{F}_i = m\,\vec{a}}$$

Segunda ley de Newton

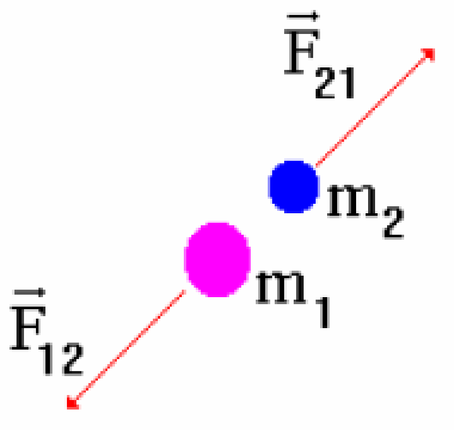
expresión vectorial
(3 ecuaciones escalares)



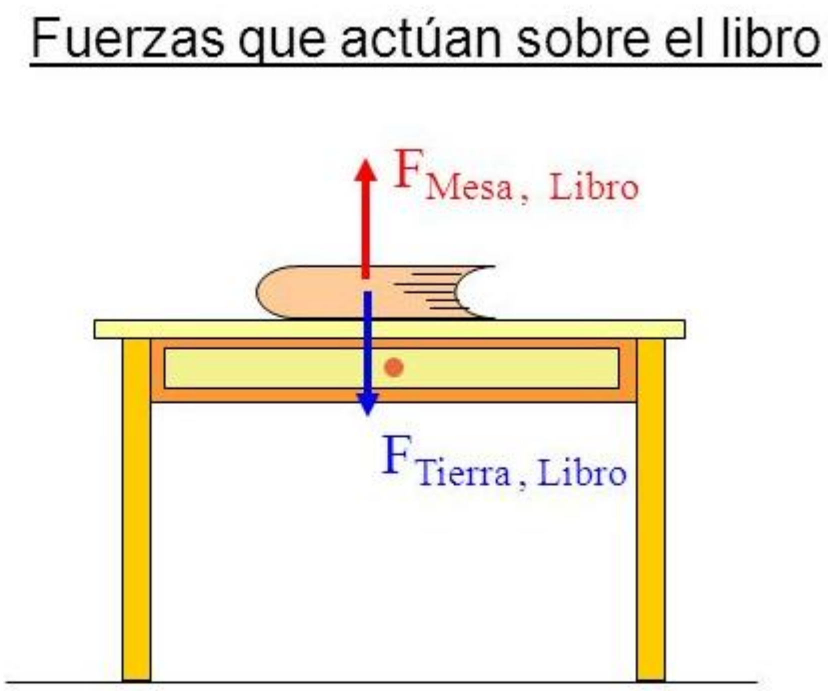
Sistema inercial → donde son válidas las leyes de Newton

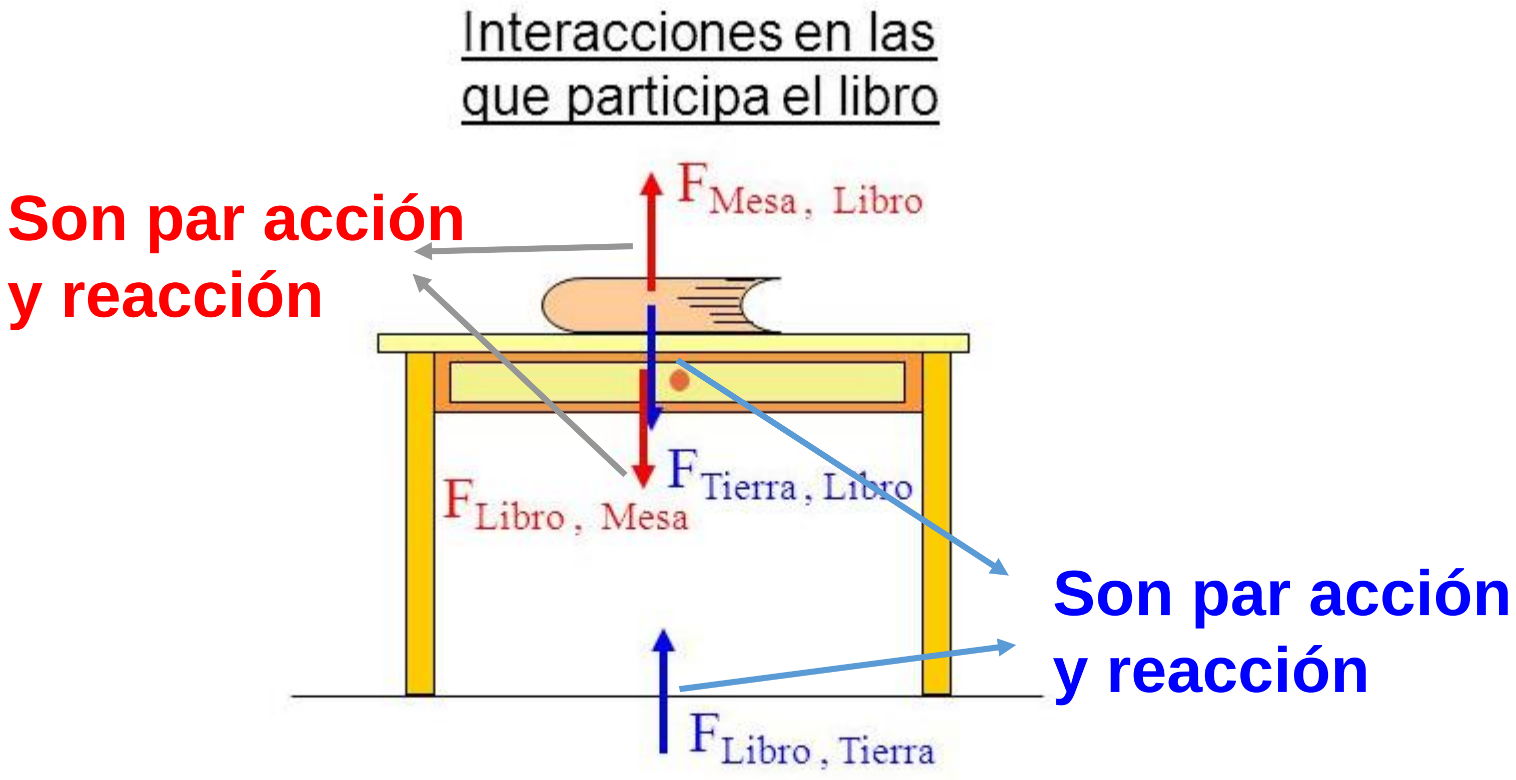
Tercera ley de Newton (principio de acción y reacción)

La interacción entre dos cuerpos siempre da lugar a un par de fuerzas de igual intensidad, dirección y sentido opuesto, aplicadas sobre cada uno de los cuerpos involucrados



$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$$





El peso y la reacción que produce la mesa, aunque tienen igual magnitud, no constituyen un par acción y reacción