Cuerpo rígido: cinemática plana

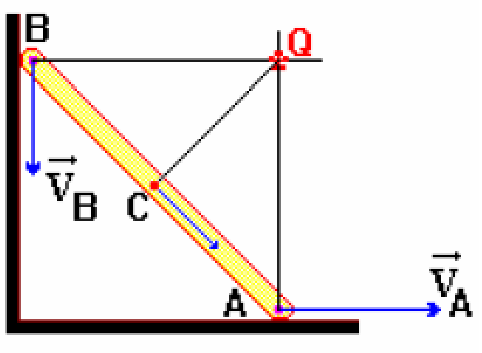
Repaso

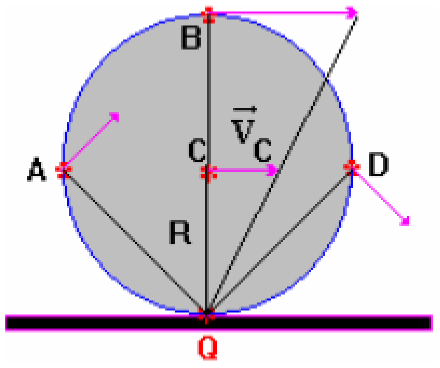
$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w} \times \vec{r}_{B/A}$ **2 ecuaciones escalares** i) j)

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{w} \times \vec{w} \times \vec{r}_{B/A} + \dot{\vec{w}} \times \vec{r}_{B/A}$ **2 ecuaciones escalares** i) j)

Centro instantáneo de rotación Q

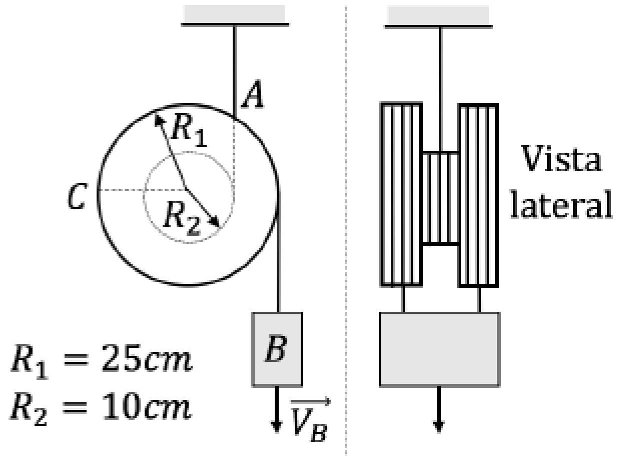
v_Q= 0 en cierto instante
No es un punto fijo, en general $a_Q \neq 0$



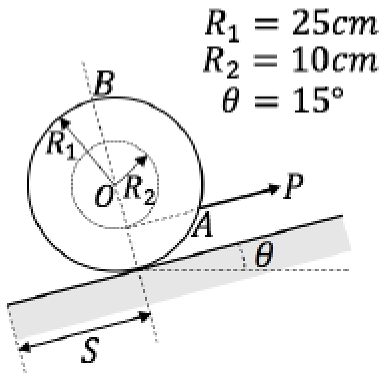


Repaso

Problema 5. El carrete rueda sobre su garganta ascendiendo por el cable interior A, cuando la placa igualadora B estira hacia abajo de los cables exteriores. Los tres cables están arrollados firmemente alrededor de sus respectivas periferias y no deslizan. Si en el instante representado, B ha descendido una distancia de $40\,cm$, partiendo del reposo con una aceleración constante de $5\,cm/s^2$, determine la velocidad de C y la aceleración del centro O para ese instante particular.



Problema 7. El centro O del carrete parte del reposo y adquiere una velocidad de $1.2\,m/s$ hacia arriba sobre el plano inclinado, con aceleración constante, en una distancia $S = 2.5\,m$ bajo la acción de una fuerza constante de módulo P, aplicada al punto A del cable. El cable está enrollado firmemente alrededor de la garganta y la rueda gira sin deslizar. Calcule la aceleración del punto A del cable, y del punto B del carrete para la posición indicada.



Ecuaciones de movimiento

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_c}$$ → **Aceleración del centro de masa**

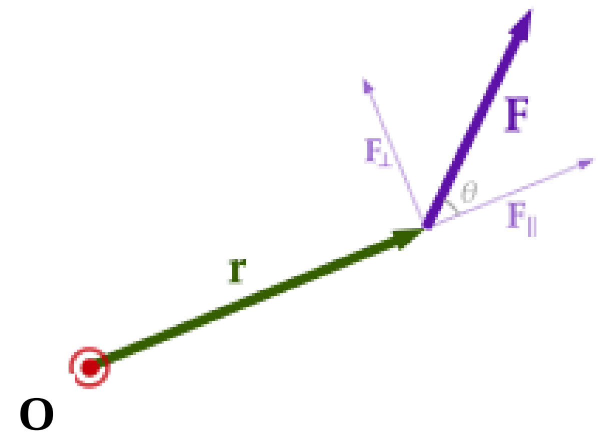
$$\boxed{\vec{M}_c = I_c\vec{\alpha}}$$ **Momento respecto al centro de masa**

$$\boxed{\vec{M}_Q = I_Q\vec{\alpha}}$$ **Momento respecto a un punto fijo**

$$\boxed{\vec{M}_A = \vec{r}_{c/A} \times m\vec{a}_c + I_c\vec{\alpha}}$$ **Momento respecto a un punto A cualquiera**

Momento o torque (respecto de O)

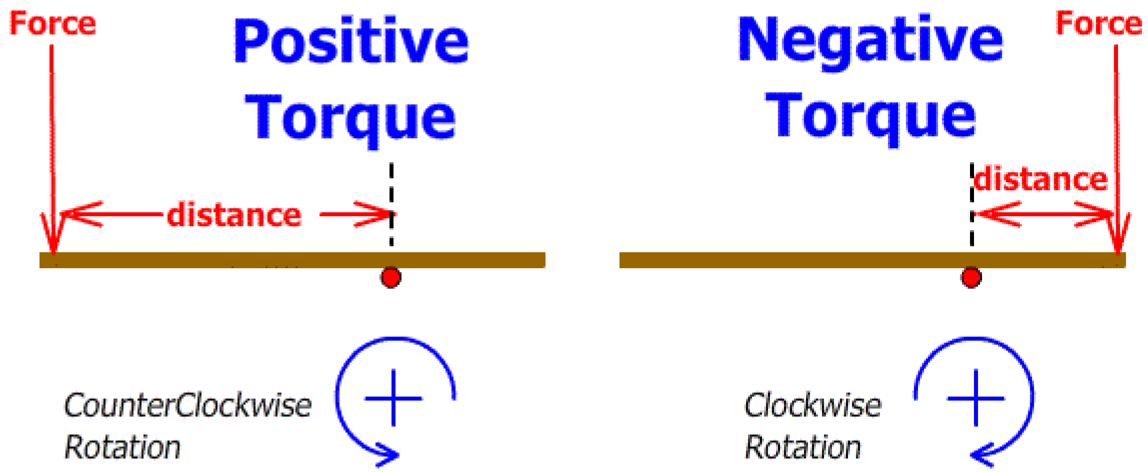
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



vector perpendicular al plano formado por r y F

$$\mathbf{M} = r\,\underbrace{F sen\theta}\,\mathbf{k}$$

$F_{\perp} \rightarrow$ **componente de F perpendicular a r**



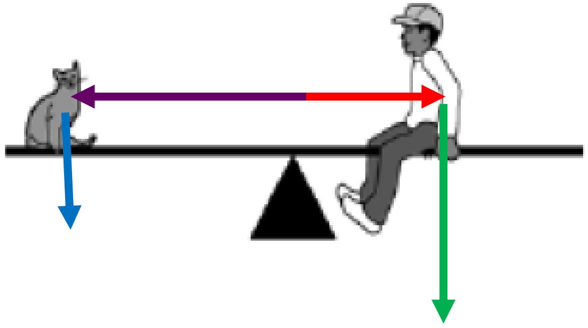
<u>Diagrama de cuerpo aislado</u> → **Fuerzas**
→ **Punto de aplicación**

Condiciones de equilibrio para un cuerpo rígido

$\vec{a}_c = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F} = 0}$ $\begin{cases} \text{i)} \\ \text{j)} \end{cases}$ **2 ecuaciones escalares**

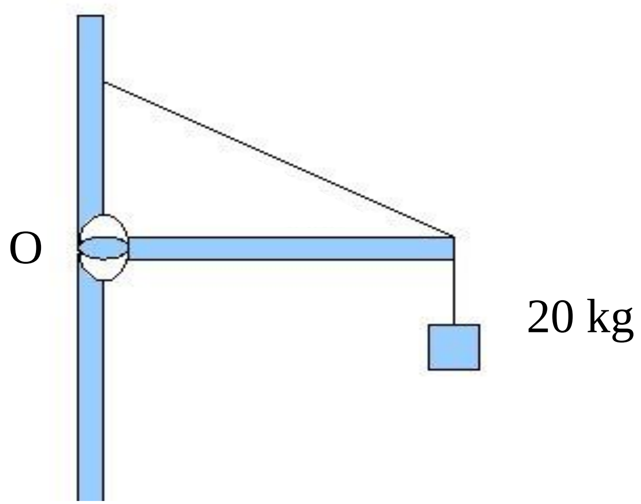
$\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{M} = 0}$ **Momento respecto a <u>cualquier</u> punto**

1 ecuacion escalar en k



Ejemplo 1:

Un anuncio de 20 kg cuelga del extremo de una barra de 2 m de longitud y 4 kg de masa. Un cable sujeta el extremo de la barra a un punto de la pared que está 1 m por encima del punto O. Determinar la tensión del cable y la fuerza ejercida por la pared en O.

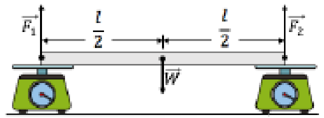


Condiciones de equilibrio

$$\vec{a}_c = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F} = 0} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\text{i) } \Sigma F_x = 0} \\ \boxed{\text{j) } \Sigma F_y = 0} \end{cases}$$

$$\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{M} = 0}$$

Problema 8. Una barra uniforme de acero, de un metro de longitud, descansa sobre dos balanzas ubicadas en sus extremos como indica la figura. La barra pesa 4 N.

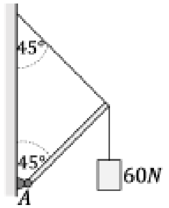


a) Indique la lectura de cada balanza.

b) Suponga que se pone un bloque de 6 N a 25 cm de un extremo de la barra. ¿Qué lectura darán las balanzas ahora?

Problema 9. ¿Es correcto afirmar que siempre que la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo rígido sea cero, el cuerpo estará en equilibrio?

Problema 10. Una barra uniforme está articulada en la pared. Un cable fijo a la pared está unido al otro extremo. Si el peso de la barra es de 20 N, calcule:

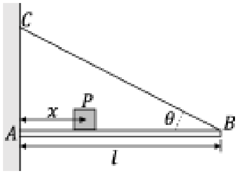


a) La fuerza ejercida sobre la articulación A.

b) El ángulo que forma dicha fuerza con la barra.

c) La tensión del cable.

Problema 11. Una barra delgada horizontal AB de peso despreciable y longitud l está articulada sobre una pared vertical en A y sostenida en B por un alambre delgado BC, que forma un ángulo θ con la horizontal. Un peso P se puede llevar a cualquier lugar de la barra y se coloca a una distancia x de la pared.

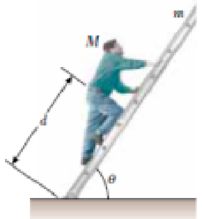


a) Encuentre la tensión en el alambre delgado en función de x.

b) Encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida en la barra por el perno A.

Problema 12. ¿Es posible subir por una escalera que esté apoyada en una pared, si el suelo no ejerce rozamiento y, en cambio, la pared si?

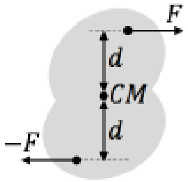
Problema 13. Una escalera de 18.29 m de largo y que pesa 445 N descansa contra un muro en un punto que está a 14.63 m sobre el suelo. El centro de masa de la escalera está a la tercera parte de su longitud, a partir de su base. Un hombre de 712 N sube hasta la mitad de la escalera. Suponiendo que la pared no tiene fricción:



a) Halle las fuerzas ejercidas sobre la escalera por el piso y la pared.

b) Si el coeficiente de fricción estática entre el suelo y la escalera es 0.4, ¿hasta qué distancia d puede subir el hombre antes de que la escalera comience a resbalar?

Problema 14. Considere un objeto sometido a dos fuerzas como indica la figura. Elija la afirmación correcta y justifique.



a) El objeto se encuentra en equilibrio de fuerzas pero no en equilibrio de momento.

b) El objeto se encuentra en equilibrio de momento pero no en equilibrio de fuerzas.

c) El objeto se encuentra en equilibrio de fuerzas y de momento.

d) El objeto no está ni en equilibrio de fuerzas ni en equilibrio de momento.

En el parcial entra hasta el problema 14 (inclusive)

de la guía de cuerpo rígido

Si el cuerpo rígido no está en equilibrio …

Ecuaciones de movimiento

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_c} \longrightarrow$$ **Aceleración del centro de masa**

$$\boxed{\vec{M}_c = I_c\vec{\alpha}}$$ **Momento respecto al centro de masa**

$$\boxed{\vec{M}_Q = I_Q\vec{\alpha}}$$ **Momento respecto a un punto fijo**

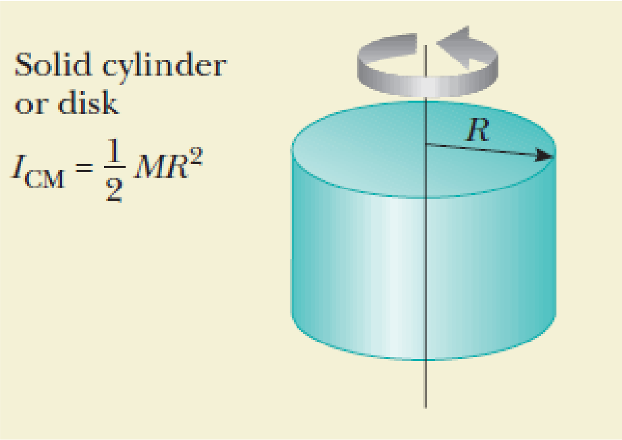
$$\boxed{\vec{M}_A = \vec{r}_{c/A} \times m\vec{a}_c + I_c\vec{\alpha}}$$ **Momento respecto a un punto A cualquiera**

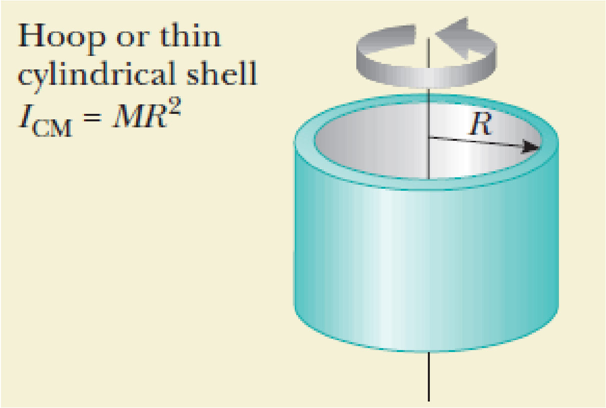
Momento de inercia

$$I_c = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Depende de la distribución de masa respecto a un eje en particular (cuanto mas lejos este la masa del eje, mayor I)

Medida de la resistencia de un objeto a experimentar cambios en su movimiento de rotación (análogo rotacional de la masa)



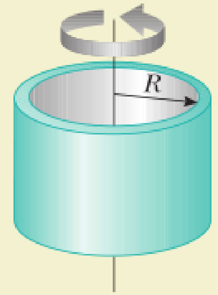


Unidades de I → kg m^2

TABLE 10.2 Moments of Inertia of Homogeneous Rigid Objects With Different Geometries

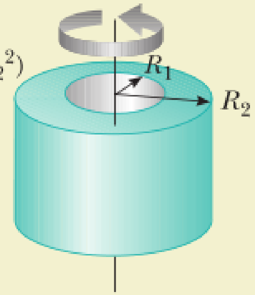
Hoop or thin cylindrical shell

$I_{CM} = MR^2$



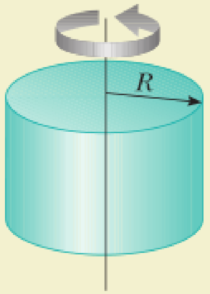
Hollow cylinder

$I_{CM} = \frac{1}{2}M(R_1^{\,2} + R_2^{\,2})$



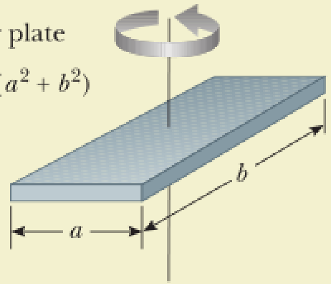
Solid cylinder or disk

$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$



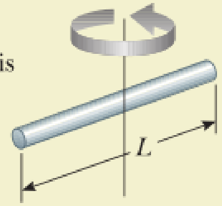
Rectangular plate

$I_{CM} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



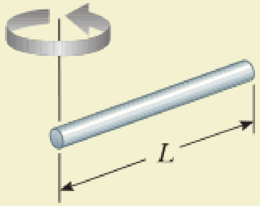
Long thin rod with rotation axis through center

$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$



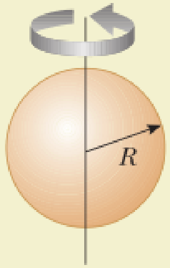
Long thin rod with rotation axis through end

$I = \frac{1}{3}ML^2$



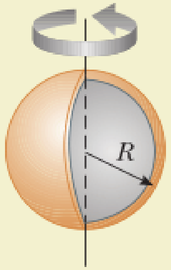
Solid sphere

$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$



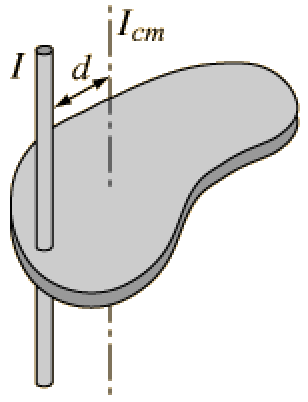
Thin spherical shell

$I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$



Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

$$I = I_{cm} + md^2$$



I_{cm} **Momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masa**

I **Momento de inercia respecto a otro eje paralelo al primero**

d **distancia entre ambos ejes**

Radio de giro k

$$I = k^2 m$$

Procedimiento

Diagrama de cuerpo aislado
- **Fuerzas**
- **Punto de aplicación**

3 ecuaciones de movimiento

$\boxed{\text{i) } \Sigma F_x = m\, a_{xc}}$

$\boxed{\text{j) } \Sigma F_y = m\, a_{yc}}$

Ecuación de movimiento para el centro de masa (2 ecuaciones escalares)

k) $M_C = I_C\, \alpha$ **respecto al c.m.**

ó

k) $M_Q = I_Q\, \alpha$ **punto fijo**

Ecuación de momento

Solo 1 ecuación escalar en k

Relaciones cinemáticas

Sistemas en traslación

Todos los puntos tienen el mismo estado de movimiento

$$\vec{a}_c \neq 0 \qquad \vec{a}_A = \vec{a}_c \qquad \boxed{\vec{F} = m\vec{a}_A}$$

$$\vec{\alpha} = 0$$

$$\vec{w} = 0$$

$$\boxed{\vec{M}_c = 0}$$

OJO con las ecuaciones de momento

$$\vec{M}_c = I_c\vec{\alpha}$$

$$\vec{M}_Q = I_Q\vec{\alpha}$$ ***No hay punto fijo***

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{c/A} \times m\vec{a}_c + I_c\vec{\alpha}$$ ***No da 0***

Problema 15. A la caja rectangular homogénea de peso P se le aplica una fuerza F. Si μ es el coeficiente de rozamiento, determine los valores límites de h, tales que hagan deslizar la caja sin volcarla hacia adelante ni hacia atrás.

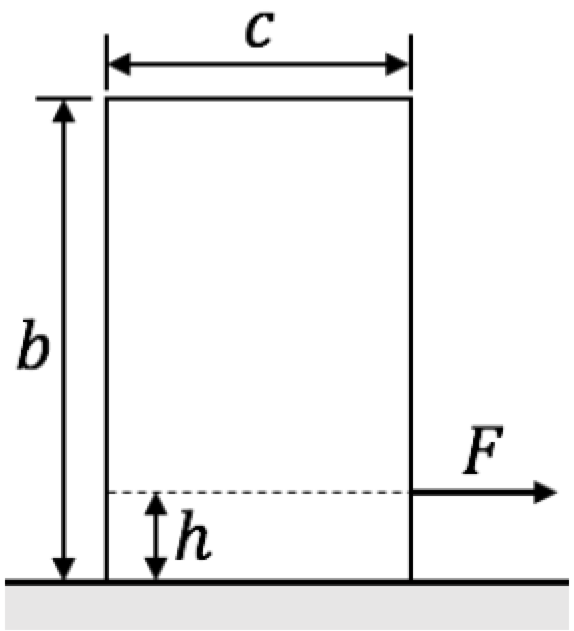


Diagrama de cuerpo aislado

3 ecuaciones de movimiento

$\boxed{\text{i) } \Sigma F_x = m\, a_{xc}}$
$\boxed{\text{j) } \Sigma F_y = m\, a_{yc}}$ } **Ec de movimiento para el centro de masa**

k) $M_C = I_C\, \alpha$ **respecto al c.m.**

ó

k) $M_Q = I_Q\, \alpha$ **punto fijo**

~~**Relaciones cinemáticas**~~

Sistemas en rotación en torno a un eje fijo

Ejemplo 3

La polea de la figura tiene un momento de inercia de 5 Kg m^2 y un radio de 0.5 m. La cuerda que sostiene a las masas m_1 y m_2 no desliza. Determinar la aceleración angular de la polea, la tensión en el cable que sostiene a m_1, la tensión en el cable que sostiene a m_2 y la reacción con el soporte.

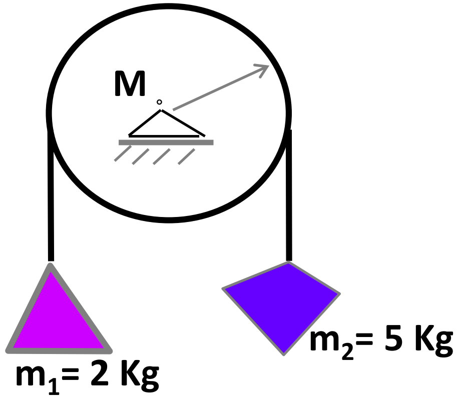


Diagrama de cuerpo aislado

3 ecuaciones de movimiento

$\boxed{\text{i) } \Sigma F_x = m\, a_{xc}}$
$\boxed{\text{j) } \Sigma F_y = m\, a_{yc}}$

Ec de movimiento para el centro de masa

k) $M_C = I_C\, \alpha$ **respecto al c.m.**

ó

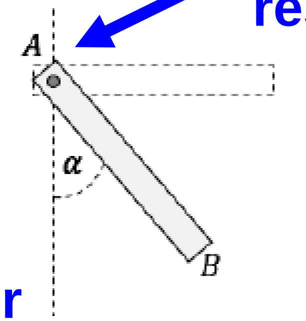
k) $M_Q = I_Q\, \alpha$ **punto fijo**

Si hay cuerpos puntuales vinculados al cuerpo rígido (x cuerdas por ej,) puede ser mas útil plantear la 2^{da} ley de Newton para los cuerpos puntuales

Relaciones cinemáticas

Tomo Momentos respecto a A

Problema 16. La varilla de la figura, de longitud L y masa m, puede rotar libremente en un plano vertical alrededor de su extremo A. Inicialmente se coloca en una posición horizontal y luego se suelta. Cuando forma un ángulo α con la vertical calcule:



a) Su aceleración angular.

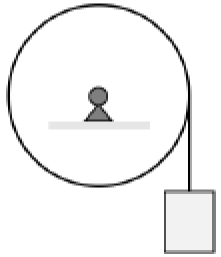
b) Su velocidad angular.

c) Las fuerzas en el lugar de suspensión.

De tablas $I_C = \frac{1}{12} M L^2$

Teorema de Steiner para calcular I_A

Problema 17. La rueda de la figura que tiene un radio de $0.5\,m$ y una masa de $25\,kg$ puede rotar con respecto a su eje horizontal. Una cuerda enrollada alrededor del eje tiene suspendida de su extremo libre una masa de $10\,kg$. Calcule:

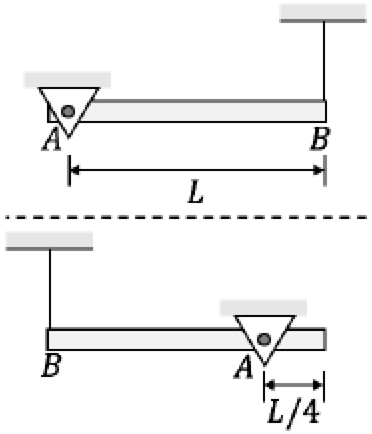


a) La aceleración angular de la rueda.

b) La aceleración lineal del cuerpo B.

c) La tensión en la cuerda.

Problema 18. Una viga uniforme de longitud L y peso W está soportada como se indica en la figura. Súbitamente se rompe el cable unido al punto B. En cada caso indicado en la figura, calcule para el instante incial:



a) Las reacciones en el pasador.

b) La aceleración del punto B.